



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

UNIDAD SALTILLO
ROBÓTICA Y MANUFACTURA AVANZADA

**CONTROL Y SINCRONIZACIÓN EN GRUPO DE ROBOTS:
COMPENSACIÓN DEL EFECTO DE RETARDO**

Tesis que presenta:

ING. HÉCTOR MANUEL PÉREZ VILLEDA

Para obtener el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS

En:

ROBÓTICA Y MANUFACTURA AVANZADA

Directora de tesis: Dra. América Berenice Morales Díaz

CONTROL Y SINCRONIZACIÓN EN GRUPO DE ROBOTS: COMPENSACIÓN DEL EFECTO DE RETARDO

ING. HÉCTOR MANUEL PÉREZ VILLEDA

Directora de tesis: Dra. América Berenice Morales Díaz y

RESUMEN

En la presente tesis se investiga la atenuación de los efectos del retardo en un grupo de robots móviles coordinados. Se propone el diseño de ganancias adaptables para compensar las oscilaciones presentadas en la sincronización entre dos grupos de robots, las cuales son causadas por el efecto del retardo inherente a sus sistemas de comunicación. El algoritmo de adaptación es diseñado usando el método de la velocidad del gradiente. Los resultados experimentales revelan que el método atenúa los efectos del retardo en la formación del grupo de robots, las amplitudes de las oscilaciones presentadas en dicho conjunto son reducidas notablemente, asegurando que se mantenga la estructura principal de la formación, incluso en la presencia de perturbaciones. Adicionalmente se encontró que el método provee resultados favorables para retardos variables y acotados, lo cual había sido un problema no atacado en la literatura actual.

CONTROL Y SINCRONIZACION EN GRUPO DE ROBOTS: COMPENSACION DEL EFECTO DEL RETARDO

ING. HÉCTOR MANUEL PÉREZ VILLEDA

Thesis supervisor: Dra. América Berenice Morales Díaz y

ABSTRACT

In this thesis, the attenuation of delay effects on a group of mobile robots is investigated. Design of adaptive gains was proposed to compensate the oscillations presented in the synchronization between two groups of mobile robots. These oscillations are caused due to the effect of the delay inherent in communication systems. The adaptation algorithm was designed using the method of velocity gradient. The experiment results show that the proposed method attenuates the delay effects in the formation of group of mobile robots, the oscillations presented due to delay effect are reduced significantly, ensuring that the main structure of the formation is maintained, even in the presence of disturbances. Additionally, the method provides favorable results for variables and bounded delays, which had been a non-solved problem in the current literature.

*Dedico este trabajo a
mi madre Socorrito Villeda ...*

Agradecimientos

A Dios por permitirme cumplir este sueño que en algún momento me propuse.

Agradezco especialmente a mi señora madre, Socorro Villeda, por su incondicional apoyo, sus preocupaciones y palabras de aliento durante el trayecto de mi maestría, por inculcar en mí la perseverancia y el esfuerzo constante. Gracias a ello logré concluir esta etapa.

A mi familia en general, mi hermano Enrique, mi padre Manuel y mi tía Yoana por estar cada momento conmigo.

A Héctor Escamilla por la confianza brindada, su apoyo constante y sus apreciables consejos.

A la Dra. América Berenice Morales Díaz por el apoyo brindado, por tomarse el tiempo de aclarar las dudas que en algún momento tuve. Por la libertad y confianza que me dio en el desarrollo de mi trabajo tesis.

Al Dr. Gustavo Arechavaleta por compartir sus conocimientos y aportes a este trabajo de tesis.

A todos y cada uno de los Doctores del Cinvestav con quienes tuve el privilegio de tomar clases, por el conocimiento brindado, sus aportaciones académicas, pero sobre todo por el ritmo y las exigencias de trabajo bajo las cuales me enseñaron a desempeñarme, me reiteraron que sin esfuerzo y sacrificio el éxito no está al alcance.

A todos y cada uno de mis amigos y compañeros que estuvieron conmigo durante esta etapa de la maestría, por aquellas personas que me reiteraron su apoyo en los momentos difíciles, por las risas compartidas y por hacer de mi estancia en Cinvestav, una estancia placentera e inolvidable.

Finalmente, a CONACyT por el apoyo brindado a través de la beca de maestría con número 345318 ...

Publicaciones

Durante el desarrollo de este trabajo de tesis se logró el siguiente artículo de conferencia:

- Formación de Robots Móviles y Evasión de Obstáculos Utilizando Algoritmos PRM y Dijkstra. Congreso Latinoamericano de Control Automático (CLCA 2014) Cancún, México

Contenido General

	Pag.
Resumen	
Abstract	i
Lista de figuras	xiii
Lista de tablas	xvii
1 Introducción	1
1.1 Estado del arte	1
1.2 Planteamiento del problema	4
1.3 Objetivo General	5
1.4 Objetivos Particulares	5
1.5 Hipótesis	5
1.6 Organización del documento	5
2 Conceptos preliminares	7
2.1 Protocolo de comunicación TCP/IP	7
2.2 Operación de TCP/IP	8
2.3 Retardo en sistemas de comunicación	9
2.3.1 Ecuaciones diferenciales funcionales	9
2.3.2 Clasificación de Sistemas con Retardos	11
2.4 Método de la velocidad del gradiente	12
2.4.1 Formulación orientada a objetivos del problema de control	12
2.4.2 Algoritmo de la velocidad del gradiente para funcionales objetivo locales	13
2.5 Efecto del retardo en la coordinación en grupo de robots	14
2.5.1 Comportamiento de los robots sin retardo	15
2.5.2 Comportamiento de los robots con retardo	17
3 Estrategia de control	19
3.1 Modelo cinemático sin retardo	19
3.2 Control	20
3.3 Control con retardo	24

3.4	Estabilidad para subsistema de posición mediante Lyapunov-Razumikhin para n robots	27
3.5	Diseño de ganancias adaptables	31
4	Plataforma experimental	34
4.1	Sistema de Visión	36
4.2	Algoritmo de visión	36
4.2.1	Clasificación	40
4.2.2	Obtención del estado del robot	41
4.2.3	Restricciones para elegir identificadores de los robots	44
4.3	Calibración del sistema de visión	44
5	Marco Metodológico	48
5.1	Idea General	48
5.1.1	Control centralizado	49
5.1.2	Funcionamiento	50
5.2	Experimento 1: Sincronización de un simulador de robots móviles en Holanda con Robots reales en México bajo retardo natural	52
5.3	Comunicación entre Holanda y México	53
5.4	Experimento 2: Sincronización de dos plataformas experimentales en México con retardo inducido	54
6	Resultados y Conclusiones	56
6.1	Implementación de ganancias adaptables en simulación	56
6.2	Experimento 1 (México Vs Holanda)	59
6.2.1	Prueba 1: Ganancias constantes	61
6.2.2	Prueba 2: Ganancias adaptables	64
6.3	Experimento 2 (México Vs México)	74
6.3.1	Trayectoria circular	75
6.3.2	Trayectoria Lissajous	82
6.4	Conclusiones y trabajo futuro	88
6.4.1	Conclusiones	88
6.4.2	Trabajo futuro	89
Apéndice	Función de Lyapunov	91
A.1	Desarrollo de la función de Lyapunov	91
A.2	Derivada de la función de Lyapunov	91
A.3	Condición para que el estado con retardo sea menor que el estado actual	96

	Pag.
A.4 Derivada del error \dot{x}_i^e	96
Referencias	98

Lista de figuras

Figura	Pag.
1.1 Robots móviles industriales desarrollados por la empresa Tecnopamic	2
1.2 Vehículo autónomo desarrollado por la empresa Google	2
2.1 Comportamiento de la formación sin retardo	8
2.2 Trayectoria real y trayectoria deseada sin retardo	15
2.3 Errores de trayectoria sin retardo	16
2.4 Trayectoria real y Trayectoria deseada con retardo inducido	17
2.5 Errores de trayectoria con retardo	18
3.1 Esquema de un robot móvil en el plano.	19
3.2 Posición actual y deseada de un robot móvil diferencial.	21
3.3 Formación virtual	23
4.1 Cámara uEye	34
4.2 Lente Navitar.	35
4.3 iRobot rumba 4400	35
4.4 Esquema general del funcionamiento de plataforma experimental	37
4.5 Plataforma experimental	37
4.6 Contraste de las marcas	38
4.7 Funcionamiento de algoritmo de visión	38
4.8 Imagen real	39
4.9 Imagen binarizada	39

4.10	Marcas usadas para la detección de los robots	41
4.11	Ejemplo de obtención de centroide de una marca	42
4.12	Ejemplo de obtención de orientación de una marca	42
4.13	Coplanaridad entre planos	44
4.14	Colocación de los robots para obtener factor de escala	45
5.1	Funcionamiento general de plataforma experimental	49
5.2	Funcionamiento de plataforma experimental (experimento 1)	53
5.3	Conexión entre Holanda y México	54
5.4	Funcionamiento de plataforma experimental (experimento 2)	55
6.1	Trayectoria real Vs Trayectoria deseada	57
6.2	Errores de trayectoria	58
6.3	Ganancias adaptables	59
6.4	Esquema de formación de los robots	60
6.5	Plataformas experimentales de México y Holanda usadas en este experimento	61
6.6	Retardo durante el experimento	62
6.7	Trayectoria Real Vs Trayectoria deseada	63
6.8	Retardo durante el experimento	64
6.9	Trayectoria Real Vs Trayectoria deseada	65
6.10	Comparación de errores de trayectoria para grupo de robots en México usando ganancias constantes y ganancias adaptables	67
6.11	Comparación de errores de trayectoria para grupo de robots en Holanda usando ganancias constantes y ganancias adaptables	68
6.12	Ganancias Adaptables en X, Y, θ para grupo de robots en México	69

Figura	Pag.
6.13 Ganancias Adaptables en X, Y, θ para grupo de robots en Holanda	70
6.14 FDN para robots de México.	72
6.15 FDN Para robots de Holanda	72
6.16 Plataformas experimentales de México usadas en experimento 2	74
6.17 Estructura de la formación experimento 2	75
6.18 Retardo durante el experimento	76
6.19 Trayectoria Real Vs Trayectoria deseada	76
6.20 Retardo durante el experimento	77
6.21 Trayectoria Real Vs Trayectoria deseada	78
6.22 Ganancias adaptables de cada robot	79
6.23 Errores de trayectoria de cada robot	81
6.24 Estructura de la formación	82
6.25 Retardo durante el experimento	83
6.26 Trayectoria deseada Vs Trayectoria real con el uso de ganancias constantes	83
6.27 Retardo durante el experimento	84
6.28 Trayectoria deseada Vs trayectoria real con el uso de ganancias adaptables	85
6.29 Comportamiento de las ganancias adaptables	85
6.30 Errores de trayectoria	86
6.31 Funciones de Distribución Normal con ganancias constantes y con ganancias adaptables	87

Lista de tablas

Tabla	Pag.
2.1 Ganancias constantes	15
4.1 Algoritmo de visión	40
4.2 Algoritmo para la obtención del estado	43
4.3 Datos de calibración	47
5.1 Etapas del experimento	51
6.1 Constantes proporcionales para ganancias adaptables	56
6.2 Datos complementarios del experimento 1	60
6.3 Ganancias constantes para ambos grupos de robots	61
6.4 Parámetros para función de distribución normal para errores de robots en México .	71
6.5 Parámetros para función de distribución normal para errores de robots en Holanda	71
6.6 Condiciones iniciales reales y deseadas	78

Capítulo 1

Introducción

Durante este capítulo se presentan los trabajos mas sobresalientes presentes en la literatura actual relacionados a la formación de robots móviles, así como también ejemplos de sus aplicaciones y algunas estrategias de control utilizadas en la formación de grupos de robots. Además, se presentan algunos trabajos donde se ha tratado el retardo en los sistemas de comunicación y las propuestas de control para asegurar estabilidad asintótica del sistema aun en la presencia de estos retardo. Finalmente los objetivos y la hipótesis de este trabajo de tesis se presentan también en este capítulo.

1.1 Estado del arte

La autonomía de sistemas móviles ha sido un tema de investigación de gran interés en la comunidad científica e industrial debido a sus innumerables aplicaciones y grandes ventajas que estos proporcionan. Las aplicaciones que ofrecen los vehículos guiados de forma autónoma, están centradas principalmente en la industria, exploración, milicia, automovilismo. Sin embargo, en muchas de estas aplicaciones no es suficiente el empleo de un solo robot. En estos casos, es necesario utilizar grupos de robots para realizar tareas cooperativas donde las operaciones de cada robot están coordinadas y son coincidentes respecto al tiempo de ejecución. Esto es a lo que se conoce como sincronización en grupos de robots. En el 2002, la empresa Tecnopamic S.A. de C.V. financió un proyecto para desarrollar un sistema de transporte industrial capaz de desplazar mercancía de un lugar a otro de forma automática dentro de grandes bodegas y almacenes. [Sanchiz Martí *et al.* (2006)].

En este tipo de sistemas la sincronización entre los vehículos es crucial para asegurar la ejecución de las tareas cooperativas. Por otra parte, empresas como Mercedes-Benz, Audi y Google han desarrollado y probado sus propios vehículos autónomos a escala real. Sin embargo, el control autónomo de un solo vehículo no ha sido la cima de la montaña en esta trayectoria tecnológica. La comisión Europea financió en 2009 el proyecto SARTRE (Safe Road Trains for the Environment) que consistió en desarrollar un conjunto autónomo de 5 vehículos capaces de transitar por carreteras guiados por un vehículo maestro [Chan *et al.* (2012)].



Figura 1.1: Robots móviles industriales desarrollados por la empresa Tecnopamic



Figura 1.2: Vehículo autónomo desarrollado por la empresa Google

Es preciso mencionar que la operación autónoma de vehículos puede realizarse gracias a los algoritmos de control desarrollados e implementados correctamente. Estos algoritmos son primeramente probados en robots móviles. En [Sadowska *et al.* (2011)] y [Morales *et al.* (2013)] los autores presentan algoritmos de control diseñados para que un grupo de robots móviles sea capaz de mantener una formación y responder ante perturbaciones presentadas gracias a la introducción de términos de acoplamiento en el control. Dichos términos funcionan como una topología de conexión mediante la cual existe una retroalimentación bidireccional de los elementos conectados. Sin embargo, en estos trabajos se desprecia el retardo que pueda existir en los sistemas de comunicación. Este problema de retardo en la sincronización de grupo de robots móviles es atacado en [Aguirre (2011)] mediante un control predictivo que anticipa el retardo y predice donde se encontrará el robot cuando la información retardada llegue al control

y de esta manera calcula la ley de control adecuada. Las principales ventajas de este enfoque son:

- La combinación de un control-predictivo es sencilla de implementar y no requiere cambio significativo al control existente.
- Existe una gran libertad en el diseño de los términos de corrección necesarios en el esquema predictivo.

La principal desventaja es que el enfoque no funciona con retardos variables.

Por otra parte, en [Jiang *et al.*(2012)] los autores investigan una ley de control basada en teoría de consensos para una formación distribuida multi-robots con retardo en el intercambio de información entre los vecinos del mismo robot. El límite superior del retardo tolerable se obtiene mediante los eigenvalores de la matriz Laplaciana y el criterio de Nyquist. Las limitantes de este enfoque siguen siendo nuevamente los retardos variables.

En otro tipo de sistemas dinámicos con retardo, específicamente los sistemas lineales invariantes en el tiempo, se encuentran trabajos en los cuales la estabilidad de estos sistemas se realiza mediante funciones cuasi-polinomiales [Galvan (1997)].

Las pruebas de estabilidad de este tipo de sistemas suelen ser muy complejas pues se trata de sistemas no lineales con retardo [Mazenc *et al.* (2000)]. Por ejemplo, en [Sedova *et al.* (2007)] se muestran condiciones suficientes para asegurar estabilidad asintótica local y global a un punto de equilibrio de un sistema de ecuaciones diferenciales en cascada con retardo [Papachristodoulou (2004)]. La idea consiste en construir funciones de Lyapunov para sistemas no lineales con retardo mediante descomposición de suma de cuadrados.

Un enfoque diferente para la estabilización de sistemas inestables que cuentan con retroalimentación de un estado retardado se encuentra en [Guzenko *et al.*(2008)] donde se diseñan ganancias adaptables a partir del método de la velocidad del gradiente. Dichas ganancias adaptables se encuentran en función de estados actuales y retardados.

1.2 Planteamiento del problema

La coordinación y control de tareas cooperativas con grupos de robots requiere el uso de sistemas de comunicación que permitan el intercambio de información entre los miembros del grupo para conocer variables tales como, posición, orientación, velocidad, aceleración, etc. Sin embargo, los sistemas de comunicación contienen retardos naturales asociados al tiempo de respuesta que pueden degradar el desempeño de tareas cooperativas e incluso inducir inestabilidad al sistema. En el caso específico de la sincronización en dos o más grupos de robots, es necesario el intercambio de información entre los elementos de la formación, como por ejemplo el vector de estado $\bar{X}(t)$ de cada robot. El flujo de información entre los elementos de la formación depende de la topología de conexión que exista internamente. Dicha información es necesaria para poder calcular el control $u(t) = f(t, x(t))$ en cada instante de tiempo y poder suministrarlo a los controladores de cada robot. Sin embargo, si en este intercambio de información existe un retardo constante τ_1 , por ejemplo en la obtención del estado del robot, es decir $\bar{X}(t - \tau_1)$, entonces al existir una retroalimentación retardada del estado, el control se convierte en una función que depende tanto del tiempo actual como del retardo experimentado $u(t, \tau_1) = f(t, x(t - \tau_1))$. Si el retardo es muy grande, el control se calculará con un estado retardado que difiere completamente del estado actual del robot, por lo tanto el control $u(t, \tau_1)$ ya no es congruente con el estado actual que experimentan los robots en el instante t . Si además de una retroalimentación retardada del estado en el control existe un retardo τ_2 en el envío de este control hacia los robots entonces el problema se agrava aun más, pues el control calculado $u(t, \tau_1)$ ahora estará llegando a los robots en el instante $t + \tau_2$. Para este instante de tiempo los robots se encontrarán en un estado completamente diferente al estado $\bar{X}(t)$.

Finalmente, en el caso de los sistemas acoplados, como lo son la formación de un grupo de robots el error de convergencia generado por los retardos τ_1 y/o τ_2 se propaga a través de la topología de conexión al resto de los elementos de la formación de los robots. Por esta razón el retardo en los sistemas de comunicación es un problema de gran magnitud que ha causado desempeños indeseables e inestabilidad en sistemas robóticas.

1.3 Objetivo General

Atenuar los efectos negativos del retardo inherentes de los sistemas de comunicación de tal manera que se pueda asegurar el buen desempeño en la sincronización a distancia de dos grupos de robots móviles diferenciales.

1.4 Objetivos Particulares

- Desarrollar e implementar una plataforma experimental en la que se puedan realizar pruebas con grupos de robots móviles.
- Analizar los efectos negativos del retardo en el desempeño de tareas cooperativas con grupos de robots.
- Desarrollar una estrategia de control que pueda asegurar el correcto funcionamiento a pesar de la presencia de retardo en los sistemas de comunicación.
- Sincronizar dos grupos de robots a distancia para el seguimiento de trayectorias.
- Establecer el máximo retardo permisible.

1.5 Hipótesis

La sincronización entre grupos de robots puede degradarse debido a retardos en los sistemas de comunicación, este efecto puede ser compensado mediante el método de diseño de ganancias de control adaptable.

1.6 Organización del documento

El desarrollo del presente trabajo de tesis descrito en este documento contiene la siguiente organización. En el Capítulo 2 se definen algunos conceptos preliminares que se ocupan a lo largo del desarrollo la tesis. En el Capítulo 3 se hace un planteamiento donde se muestra matemáticamente la implicación que tiene el retardo en la dinámica del sistema. Finalmente

este capítulo termina con el desarrollo de las ganancias adaptables propuestas para eliminar los efectos negativos del retardo en la sincronización del grupo de robots. En el Capítulo 4 se encuentra el desarrollo e implementación de la plataforma experimental que sirvió para validar la estrategia de control propuesta en este trabajo de tesis. El Capítulo 5 presenta la estructura y la metodología de los experimentos que validan la estrategia de control. Finalmente en el Capítulo 6 se muestran los resultados obtenidos y las correspondientes discusiones. Este capítulo finaliza con las conclusiones y el trabajo futuro de este trabajo de tesis.

Capítulo 2

Conceptos preliminares

Durante este capítulo se presenta la descripción de conceptos que contribuirán en la claridad de las ideas en este trabajo de tesis. Se comienza por una descripción general del protocolo de comunicación TCP/IP. Posteriormente se presentan algunas clasificaciones de ecuaciones diferenciales funcionales con retardo. Finalmente se presenta la formulación del método de la velocidad del gradiente. Este último concepto es el mas importante, pues es el método en el que se basa la solución propuesta en este trabajo de tesis.

2.1 Protocolo de comunicación TCP/IP

TCP/IP es un grupo de protocolos diseñados para la comunicación entre computadoras. TCP/IP está compuesto por dos partes de software de Internet particularmente importantes e innovadoras. El software de protocolo Internet (IP) proporciona la comunicación básica, en tanto que el software de protocolo de control de transmisión (TCP) suministra las facilidades adicionales que necesitan las aplicaciones. IP proporciona una forma para transferir un paquete desde su origen hasta su destino pero no soluciona problemas como la pérdida de datos o fallas en la entrega. TCP resuelve problemas que IP no puede. Juntos proporcionan una forma confiable de enviar datos a través de la red.

2.2 Operación de TCP/IP

La Figura 2.1 indica cómo estos protocolos están configurados para la comunicación entre dos anfitriones. Para aclarar que todo el recurso de comunicaciones puede consistir en muchas redes, a las redes constitutivas comúnmente se les llama *subredes*. Algún tipo de protocolo de acceso a red, por ejemplo la lógica Ethernet, se emplea para conectar una computadora a una subred. Este protocolo permite que el anfitrión envíe datos a través de la subred hacia otro anfitrión o, en el caso de un anfitrión de alguna otra subred, hacia un enrutador. IP se instrumenta en todos los sistemas terminales y enrutadores. Actúa como relevador para mover un bloque de datos desde un anfitrión, a través de uno o más enrutadores, hasta otro anfitrión. TCP se implementa sólo en los sistemas terminales; mantiene el rastreo de los bloques de datos para asegurar que todos sean entregados con seguridad a la aplicación apropiada. Para la comunicación exitosa, cada entidad de todo el sistema debe poseer una dirección única. Realmente se necesitan dos niveles de direccionamiento. Cada anfitrión en una subred debe de tener una dirección Internet global única; esto permite que los datos sean entregados al anfitrión apropiado.

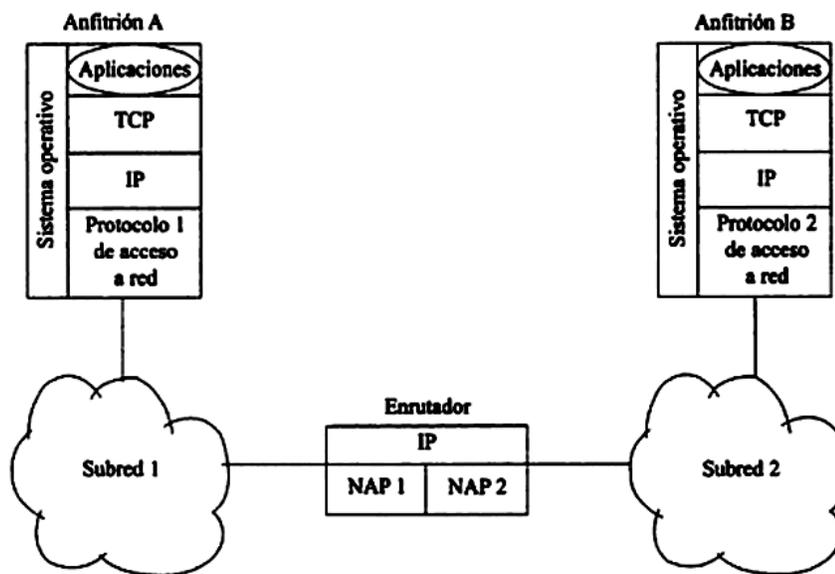


Figura 2.1: Comportamiento de la formación sin retardo

2.3 Retardo en sistemas de comunicación

Los sistemas de retardo (TDS, por sus siglas en inglés), surgen debido a los retrasos inherentes en los componentes de los sistemas, o de la introducción deliberada de tiempo de retardo en los sistemas para fines de control. Este tiempo de retardo es debido al procesamiento del control, tratamiento de las señales o lectura del estado del sistema debido a los sensores.

Ciertos tiempos de retardo se producen a menudo en sistemas de ingeniería, biología, química, física y ecología [Niculescu *et al.* (2001)]. Los sistemas con retardo pueden ser representados por ecuaciones diferenciales de retardo (EDR), que pertenecen a la clase de ecuaciones diferenciales funcionales, y han estudiado ampliamente durante las últimas décadas [Richard (2003)]. Tales tiempos de retardo pueden limitar y degradar el rendimiento alcanzable de sistemas controlados, e incluso inducir inestabilidad. Los términos de retardo conducen a un número infinito de raíces en la ecuación característica, haciendo difícil analizar los sistemas con métodos clásicos, especialmente, en la comprobación de la estabilidad y el diseño de controladores estabilizadores [Yi, *et al.* (2010)].

2.3.1 Ecuaciones diferenciales funcionales

Definición: Las ecuaciones diferenciales funcionales (EDF) difieren básicamente de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) en que al menos uno de los argumentos de la ecuación no depende directamente del tiempo t , sino a través de una cierta función $g(t)$ de modo que:

$$\dot{x} = f(t, x(g(t))) \quad (2.1)$$

El comportamiento de los sistemas con retardos temporales se pueden describir a partir de EDF [Hale (1984)]. Es fácil ver que siempre que el retardo sea constante la función $g(t)$ es lineal en t con pendiente 1. Por ejemplo, para un cierto sistema con retardo τ la dinámica viene gobernada por:

$$\dot{x} = f(t, x(t - \tau)) \quad (2.2)$$

donde la condición inicial del estado $x(t)$ en cualquier instante de tiempo se define a partir de la evolución histórica del estado en la ventana temporal $t - \tau \leq t$ como:

$$\begin{aligned} x(t + \theta) &= \phi(\theta) \\ -\tau &\leq \theta \leq 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

condición a partir de la cual se puede obtener unívocamente la evolución futura del estado desde el instante t , siempre que la parte derecha de la ecuación (2.3) sea continua en todos sus argumentos, y Lipschitz, de forma análoga a las EDO con las condiciones iniciales definidas en un instante puntual.

2.3.1.1 Clasificación EDF de sistemas con retardo

En términos generales, la ecuación diferencial funcional de un sistema con retardos temporales puede escribirse como:

$$x^{(m)}(t) = f(t, x^{(m_1)}(t - \tau_1(t)), x^{(m_2)}(t), \dots, x^{(m_k)}(t - \tau_k(t))) \quad (2.4)$$

Dependiendo de si el argumento con mayor grado en la derivada contiene o no retardos cabe distinguir los siguientes casos:

- Ecuaciones diferenciales funcionales retardadas (EDFR): Cuando el término de mayor grado en la derivada (m) se sitúa en el término libre de retardo ($m \geq \max(m_1, m_2, \dots, m_k)$):

$$\dot{x}(t) = f(x(t - \tau(t))) \quad (2.5)$$

Por ejemplo, el siguiente sistema lineal con un único retardo en el estado:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau(t)) \quad (2.6)$$

- Ecuaciones diferenciales funcionales neutrales (EDFN): Cuando el término de mayor grado en la derivada se sitúa en el término con retardo de modo que ($m = \max(m_1, m_2, \dots, m_k)$):

$$\dot{x}(t - \tau_1(t)) = f(x(t - \tau_2(t))) \quad (2.7)$$

2.3.2 Clasificación de Sistemas con Retardos

Según el argumento de mayor grado de su derivada

- Sistemas Retardados [Richard (2003)]: Cuando la dinámica del sistema se puede modelar a partir de una EDFR.
- Sistemas Neutrales: cuando la dinámica del sistema se puede modelar a partir de una EDFN.

Según el número de retardos

- Sistemas con retardo único: Sistemas en los que solamente aparece un único retardo diferente:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t))) \quad (2.8)$$

- Sistema con múltiples retardos: Sistemas en los que aparece más de un retardo:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_m(t))) \quad (2.9)$$

En el caso particular en que todos los retardos $\tau_i(t), 1 \leq i \leq m$ sean múltiplos enteros de un cierto retardo base τ , se denomina *commensurate delays*:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - d_1(t)\tau), \dots, x(t - d_m(t)\tau)) \quad (2.10)$$

$$d_i(t) \in \mathbb{N}+, 1 \leq i \leq m$$

Según la ubicación del retardo: Definiendo el siguiente modelo de proceso cuya representación en variables de estado es:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t - \tau_{x_1}), \dots, x(t - \tau_{x_{m_x}}), u(t - \tau_{u_1}), \dots, u(t - \tau_{u_{m_u}})) \quad (2.11)$$

$$y(t) = g(t, x(t - \tau_{y_1}), \dots, x(t - \tau_{y_{m_y}}))$$

según la ubicación del retardo se tiene:

- Retardos en la entrada ($\tau_{u_i}, 1 \leq i \leq m_u$): Tiene lugar cuando existe un retardo entre el instante de generación de la acción y el instante en que ésta se aplica a la planta. Ejemplos típicos se dan en sistemas en los que existe transporte de materia o energía o en sistemas de control distribuidos donde el controlador y el actuador se encuentran físicamente separados.
- Retardos en la salida ($\tau_{y_i}, 1 \leq i \leq m_y$): Tiene lugar cuando existe un retardo entre el instante en que el sensor mide la salida y el instante de cálculo de la acción de control. Ejemplos típicos se dan en sistemas en los que existe transporte de materia o energía o en sistemas de control distribuidos donde el sensor y el controlador se encuentran físicamente separados.
- Retardos en el estado: Afecta al estado interno del proceso y corresponde dentro del modelo con $\tau_{x_i}, 1 \leq i \leq m_x$. Por ejemplo, los sistemas físicos en los que existen lazos cerrados internos en los que hay recirculación de materia/energía con el correspondiente retardo interno de propagación [Sorribes (2011)].

De acuerdo a la clasificación *según el número de retardos* el sistema involucrado en este trabajo de investigación se ubica dentro de los “Sistemas con retardo único”, puesto que el retardo experimentado por el conjunto de robots es el mismo para todos, mientras que de acuerdo a la clasificación *según la ubicación del retardo* el sistema contiene retardos en la entrada y retardos en la salida, ya que el conjunto de robots presenta retardo en el envío del control y al momento de la recepción del estado de cada robot.

2.4 Método de la velocidad del gradiente

2.4.1 Formulación orientada a objetivos del problema de control

Considere un sistema con un modelo dado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{x} = F(x, u, t) \quad (2.12)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, es el vector de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, es la entrada de control. Supongamos que la función vectorial $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $t \geq 0$, es continua a trozos en t y continuamente diferenciable en x y u .

El problema de control general se puede definir como la búsqueda de la ley de control $u(t) = U[x(s), u(s) : 0 \leq s \leq t]$ que garantice el objetivo del control:

$$Q_t \leq \Delta \quad \text{cuando} \quad t \geq t_0, \quad (2.13)$$

donde Q_t es el valor de alguna funcional objetivo no negativa calculada en el instante t , Δ es una tolerancia especificada y t_0 es el instante de tiempo en el cual el control objetivo es alcanzado. El objetivo (2.13) puede ser formulado también como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q_t \leq \Delta \quad (2.14)$$

que de hecho difiere ligeramente de (2.13). Para el caso especial $\Delta = 0$ se alcanza el objetivo

$$Q \rightarrow 0 \quad \text{conforme} \quad t \rightarrow \infty \quad (2.15)$$

2.4.2 Algoritmo de la velocidad del gradiente para funcionales objetivo locales

Suponga que el control objetivo (2.13) o (2.15) es formulado para la funcional objetivo local $Q_t = Q(x(t), t)$. Considerando el gradiente de una función f como:

$$\nabla_x f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

entonces para diseñar el algoritmo de control se debe encontrar la función escalar $\dot{Q}_t = \omega(x, u, t)$ como la velocidad de cambio de Q_t a lo largo de la trayectoria del sistema (2.12):

$$\omega(x, u, t) = \nabla_t Q(x, t) + (\nabla_x Q(x, t))^T F(x, u, t) \quad (2.16)$$

Para calcular el vector gradiente de ω respecto al vector u :

$$\nabla_u \omega(x, u, t) = \left(\frac{\partial \omega(x, u, t)}{\partial u} \right)^T = \left(\frac{\partial F(x, u, t)}{\partial u} \right)^T \nabla_x Q(x, t) \quad (2.17)$$

Finalmente, el algoritmo de control queda de la siguiente manera:

$$\frac{du}{dt} = -\Gamma \nabla_u \omega(x, u, t) \quad (2.18)$$

donde $\Gamma = \Gamma^T \geq 0$ es una matriz positiva definida (por ejemplo $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$). Generalmente el algoritmo (2.18) se le conoce como *Algoritmo de la velocidad del gradiente* (SGA, por sus siglas en inglés), ya que de acuerdo a (2.18), el cambio de la entrada de control u es proporcional al gradiente de la velocidad de cambio de la función objetivo Q_t [Pogromsky *et al.* (1998)].

2.5 Efecto del retardo en la coordinación en grupo de robots

Se sabe que el retardo en los sistemas de comunicación puede repercutir en la coordinación de grupos de robots degradando la tarea cooperativa o incluso induciendo inestabilidad al sistema [Richard (2003)]. Para el caso específico de seguimiento de trayectorias de grupos de robots móviles el retardo en la actualización del estado de los robots puede ser causada ya sea por una baja frecuencia de muestreo en los sensores o por un retardo en la transmisión de datos en los sistemas de comunicación. En este trabajo de tesis se ha encontrado que los robots móviles que siguen una trayectoria de referencia trabajando bajo retardo, tienen comportamiento oscilatorio alrededor de la trayectoria de referencia, aumentando la amplitud de estas oscilaciones de forma proporcional al retardo en el sistema. Si el retardo es muy grande el sistema llega a inestabilizarse.

La identificación de este comportamiento se encontró mediante simulaciones tras inducir un retardo en la actualización del estado de dos robots móviles intentando seguir una trayectoria circular.

En esta prueba se simularon dos robots móviles intentando seguir una trayectoria circular de 1.5 m. de radio, con un desfase entre ellos de 0.5 radianes. La trayectoria circular constó de dos vueltas en 150 segundos, se indujo una perturbación al robot 0 en el segundo 40

y las ganancias constantes del control se encuentran en la Tabla 2.1. Se realizaron dos pruebas con estas especificaciones, una prueba sin retardo y otra prueba con un retardo inducido de un segundo. A continuación se muestra la comparación del comportamiento de los robots cuando trabajan sin retardo y con retardo [Herrera (2003)].

Tabla 2.1: Ganancias constantes

C_x	C_y	C_θ
1.7	31	3.5

2.5.1 Comportamiento de los robots sin retardo

En la Figura 2.2 se observa la trayectoria real y deseada de los dos robots trabajando sin retardo. Se puede apreciar la perturbación inducida al robot 0, a pesar de esto, se observa que el robot converge asintóticamente a su trayectoria de referencia. Al mismo tiempo el robot 1 también experimenta una perturbación de magnitud menor debido al acoplamiento que existe en el control para mantener la formación.

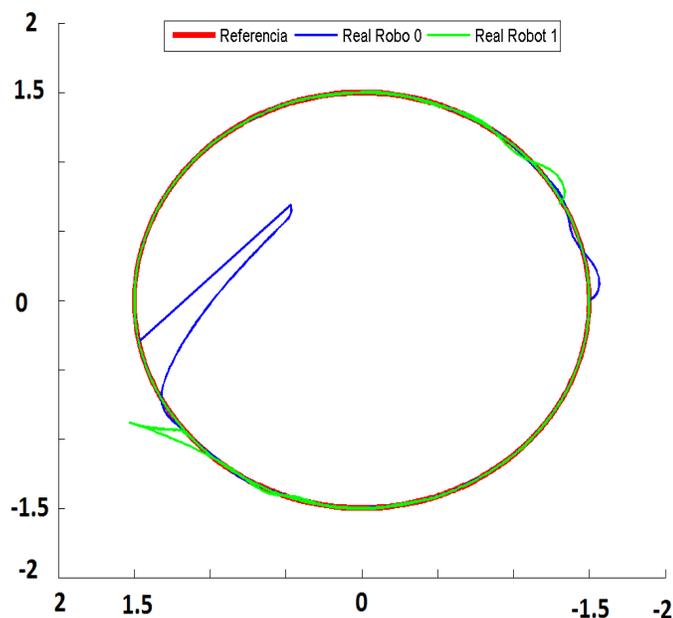


Figura 2.2: Trayectoria real y trayectoria deseada sin retardo

En la Figura 2.3 se muestran los errores de trayectoria de cada robot a lo largo de esta simulación. Se observan sobre impulsos correspondientes a la perturbación y posterior a esto se observa que estos sobre impulsos convergen a cero. Estas gráficas de los errores muestran un comportamiento ideal de los robots trabajando sin algún tipo de retardo.

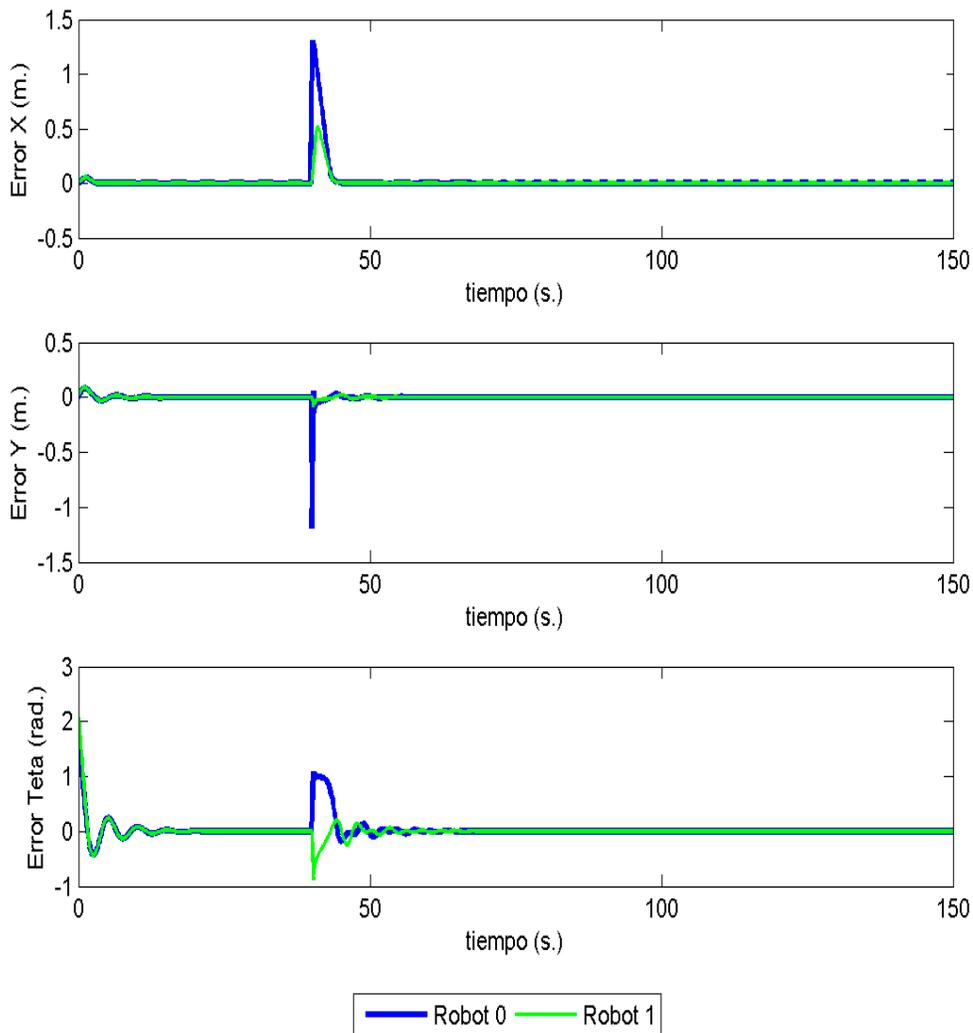


Figura 2.3: Errores de trayectoria sin retardo

2.5.2 Comportamiento de los robots con retardo

En la Figura 2.4 se observa el comportamiento de los dos robots trabajando bajo un retardo inducido de 1 segundo. Se puede apreciar que los robots intentan seguir sus respectivas trayectorias de referencia. Sin embargo, se presentan oscilaciones alrededor de dichas trayectorias de referencia. En la perturbación del robot 0 se observa que el robot intenta converger nuevamente a la trayectoria deseada, pero lo hace de manera oscilatoria.

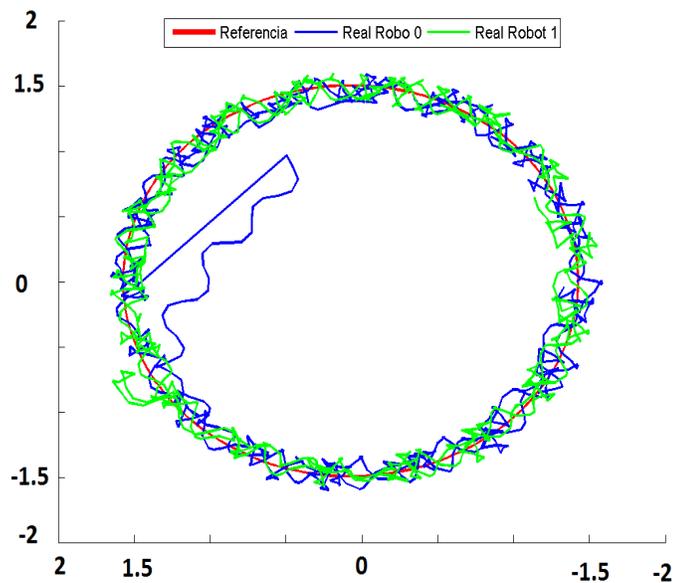


Figura 2.4: Trayectoria real y Trayectoria deseada con retardo inducido

Por último, en la Figura 2.5 se muestran las respectivas gráficas de los errores de cada robot. Como se puede ver, estas gráficas presentan también oscilaciones considerables durante todo el tiempo de simulación. Dichas oscilaciones son congruentes con el comportamiento oscilatorio alrededor de la trayectoria de referencia de cada robot. El sobre impulso observado en las gráficas es debido a las respectivas perturbaciones experimentadas en cada robot.

El comportamiento observado en esta simulación ayudo a tener una idea inicial de cómo el retardo afecta en el desempeño de los robots, encontrando así, que la amplitud de estas oscilaciones es proporcional a la magnitud del retardo.

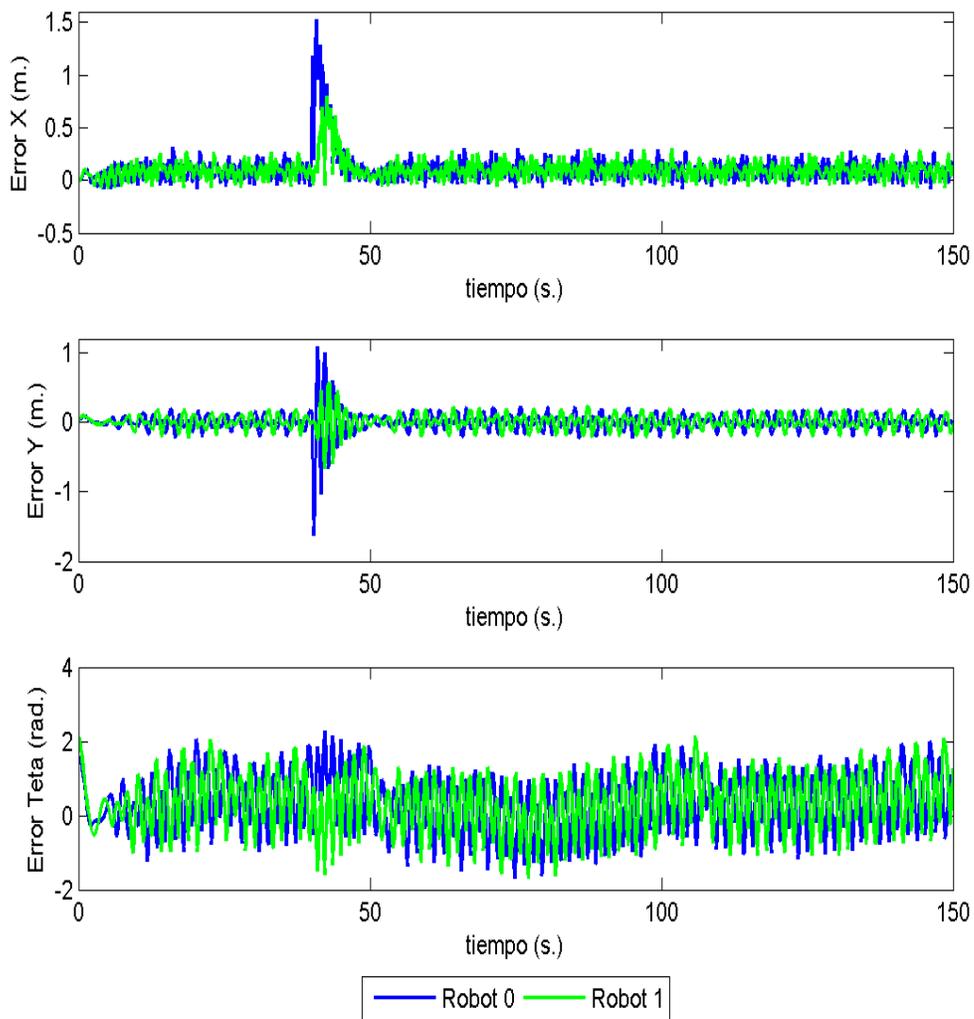


Figura 2.5: Errores de trayectoria con retardo

Capítulo 3

Estrategia de control

3.1 Modelo cinemático sin retardo

La configuración Cartesiana $\xi = [x, y, \theta]^T$ de un robot móvil diferencial de dos ruedas con centro de masa en medio de su eje y con una rueda pasiva puede apreciarse en la Figura 3.1, donde ξ son las coordenadas generalizadas Cartesianas, (x, y) es la posición del centro de masa del robot en el plano y θ denota el ángulo de orientación.

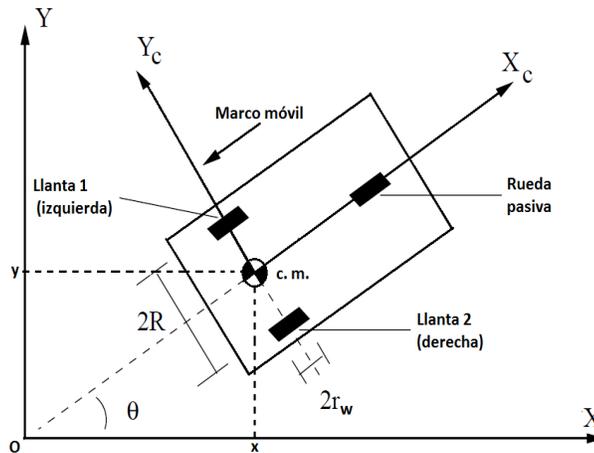


Figura 3.1: Esquema de un robot móvil en el plano.

El modelo cinemático de un robot móvil en coordenadas Cartesianas está dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos(\theta) \\ \dot{y} &= v \sin(\theta) \\ \dot{\theta} &= \omega\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde v es la velocidad lineal del robot móvil y ω la velocidad angular, derivándose además la siguiente restricción no-holónoma

$$\dot{x} \sin(\theta) - \dot{y} \cos(\theta) = 0\tag{3.2}$$

3.2 Control

Como se muestra en [Kostić *et al.* (2010)] y [Sadowska *et al.* (2011)], un grupo de robots móviles diferenciales debe mantener una formación deseada mientras que cada robot sigue una trayectoria de referencia. Para lograr este fin se considera un control donde todos los robots siguen su propia trayectoria obedeciendo la restricción no holónoma de esta clase de sistemas (ecuación (3.2)).

Considerando el modelo cinemático presentado en la ecuación (3.1), el modelo para un grupo de n robots móviles diferenciales está dado por las siguientes ecuaciones [Kanayama *et al.* (1990)]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= v_i \cos \theta_i \\ \dot{y}_i &= v_i \sin \theta_i \\ \dot{\theta}_i &= \omega_i\end{aligned}\tag{3.3}$$

para $i = 1, \dots, n$, donde x_i y y_i son las coordenadas Cartesianas del i -ésimo robot, v_i y ω_i son las velocidades lineal y angular, respectivamente, y θ_i es el ángulo de orientación respecto al eje X del plano de referencia. De acuerdo con el plano de referencia y considerando la postura

deseada (véase la Figura 3.2), el error de seguimiento se define como:

$$\begin{aligned} x_i^e &= (x_i^d - x_i) \cos \theta_i + (y_i^d - y_i) \sin \theta_i \\ y_i^e &= -(x_i^d - x_i) \sin \theta_i + (y_i^d - y_i) \cos \theta_i \\ \theta_i^e &= \theta_i^d - \theta_i \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde las coordenadas de referencia son x_i^d , y_i^d y θ_i^d , mientras que las coordenadas reales son x_i , y_i y θ_i .

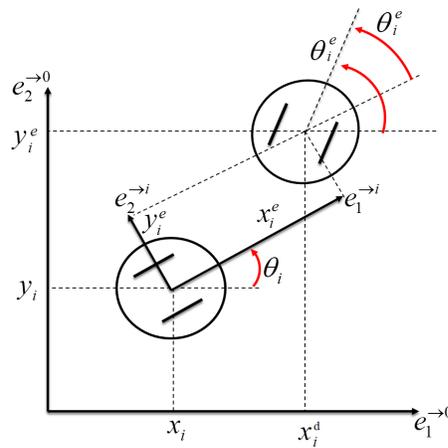


Figura 3.2: Posición actual y deseada de un robot móvil diferencial.

La dinámica de error está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^e &= \omega_i y_i^e - v_i + v_i^d \cos \theta_i^e \\ \dot{y}_i^e &= -\omega_i x_i^e + v_i^d \sin \theta_i^e \\ \dot{\theta}_i^e &= \omega_i^d - \omega_i \end{aligned} \quad (3.5)$$

NOTA: Ver detalles sobre el desarrollo de la derivada \dot{x}_i^e en el Apéndice A.4

Las trayectorias viables para el i -ésimo robot satisfacen la restricción no-holónoma de la ecuación (3.2), por lo tanto para $\dot{x}_{ri} \neq 0$ y $\dot{y}_{ri} \neq 0$, las velocidades lineal y angular deseadas que se derivan de la trayectoria de referencia son:

$$\begin{aligned} v_i^d &= \sqrt{(\dot{x}_i^d)^2 + (\dot{y}_i^d)^2} \\ \omega_i^d &= \dot{\theta}_i^d = \frac{\dot{x}_i^d \ddot{y}_i^d - \ddot{x}_i^d \dot{y}_i^d}{v_i^{d2}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

El objetivo de la formación es el seguimiento cooperativo, esto significa que cada robot debe seguir su propia trayectoria de referencia respetando la formación definida. Los errores de acoplamiento son definidos como:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} x_i^e - x_j^e \\ y_i^e - y_j^e \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{0}, \\ &\forall i, j \in (1, 2, \dots, n), i \neq j \end{aligned} \quad (3.7)$$

Se desea que cada robot siga su trayectoria de referencia, es decir, $(x_i^e, y_i^e, \theta_i^e) \rightarrow 0$, manteniendo una estructura virtual de formación (ver Figura 3.3). Esta formación contiene un centro virtual, el cual no necesariamente es el centro geométrico de la formación. El centro virtual debe seguir a su vez una trayectoria de referencia predefinida $q_{vc}^d(t)$ compuesta por $(x_{vc}^d, y_{vc}^d, \theta_{vc}^d)$, en donde x_{vc}^d, y_{vc}^d denotan la trayectoria Cartesiana deseada y θ_{vc}^d denota la orientación deseada. Los elementos de la formación mantienen un patrón de distancia $p_i(t) = 1, \dots, n$, definido por la configuración de la formación. De esta manera cada trayectoria de referencia individual (x_i^d, y_i^d) expresada en el marco de referencia \bar{e}^0 (ecuación (3.8) y (3.9)) se genera a partir de la trayectoria de referencia del centro virtual y puede expresarse de la siguiente manera.

$$x_i^d = x_{vc}^d + p_{xi} \cos \theta_{vc}^d - p_{yi} \sin \theta_{vc}^d \quad (3.8)$$

$$y_i^d = y_{vc}^d + p_{yi} \sin \theta_{vc}^d + p_{xi} \cos \theta_{vc}^d \quad (3.9)$$

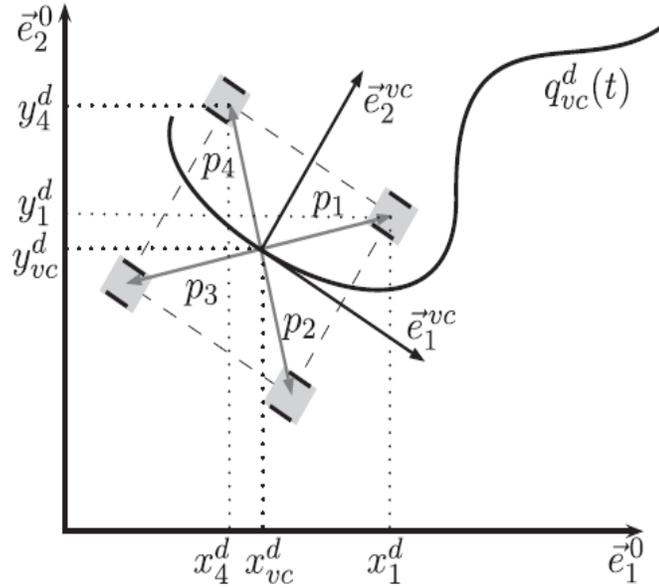


Figura 3.3: Formación virtual

Para lograr lo antes mencionado se utiliza el control propuesto en [Morales *et al.* (2013)], con la siguiente velocidad lineal y angular

$$\begin{aligned}
 v_i &= v_i^d \cos \theta_i^e + C_i^x \left[x_i^e + \sum_{j=1, j \neq i}^n C_{ij}^x (x_i^e - x_j^e) \right] \\
 \omega_i &= \omega_i^d + C_i^\theta \theta_i^e + v_i^d \frac{\sin \theta_i^e}{\theta_i^e} \frac{K}{\alpha_i} C_i^y \left[y_i^e + \sum_{j=1, j \neq i}^n C_{ij}^y (y_i^e - y_j^e) \right]
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

donde C_i^x , C_{ij}^x , C_i^y , C_{ij}^y , C_i^θ y K son las ganancias del control y el término α_i delimita el efecto de los errores de seguimiento y acoplamiento, definiéndose como:

$$\alpha_i = \sqrt{K^2 + x_i^{e2} + y_i^{e2} + \sum_{j=1, j \neq i}^n (x_i^e - x_j^e)^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^n (y_i^e - y_j^e)^2} \tag{3.11}$$

Nota. Se puede apreciar que en el control propuesto (ver ecuaciones (3.10)), existe un compromiso entre los errores de seguimiento x_i^e , y_i^e , θ_i^e y los errores de formación $[(x_i^e - x_j^e), (y_i^e - y_j^e)]$,

lo que significa que a través de las ganancias C_i^x, C_i^y, C_i^θ el objetivo de seguimiento se cumple, mientras que la formación es afectada por las ganancias C_{ij}^x y C_{ij}^y para cada x_i y y_i respectivamente. En otras palabras, los parámetros de diseño C_i^x, C_i^y, C_i^θ son las ganancias del control responsables del seguimiento de las trayectorias de referencia para cada robot. Los términos C_{ij}^x y C_{ij}^y son las ganancias de acoplamiento, que afectan la coordinación de los robots en la formación. La ganancia K normaliza al término $\frac{K}{\alpha_i}$ cuando los errores de seguimiento y de acoplamiento son iguales a cero, por otra parte limita al término $[y_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n C_{ij}^y (y_i^e - y_j^e)]$ en el cálculo de la velocidad angular ω_i en las ecuaciones (3.10). La estabilidad de este control fue demostrada en [Morales *et al.* (2013)].

3.3 Control con retardo

Tomando en cuenta que el estado de los robots llega de forma retardada a la computadora entonces, los errores de seguimiento son calculados de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} x_i^e(t, \tau) \\ y_i^e(t, \tau) \\ \theta_i^e(t, \tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i(t - \tau) & \sin \theta_i(t - \tau) & 0 \\ -\sin \theta_i(t - \tau) & \cos \theta_i(t - \tau) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i^d(t) - x_i(t - \tau) \\ y_i^d(t) - y_i(t - \tau) \\ \theta_i^d(t) - \theta_i(t - \tau) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Las variables $(x_i(t - \tau), y_i(t - \tau), \theta_i(t - \tau))$ representa el estado del i -ésimo robot con un retardo τ , por lo tanto, los errores también contienen un retardo τ y están representados por las variables $(x_i^e(t, \tau), y_i^e(t, \tau), \theta_i^e(t, \tau))$.

Considerando los errores retardados de las ecuaciones (3.12), el control se calcula en función de estos errores así que, las ecuaciones de control (3.10) con retardo se expresan como:

$$\begin{aligned} v_i(t, \tau) &= v_i^d(t) \cos \theta_i^e(t, \tau) + C_i^x \left[x_i^e(t, \tau) + \sum_{j=1, j \neq i}^n C_{ij}^x [x_i^e(t, \tau) - x_j^e(t, \tau)] \right] \\ \omega_i(t, \tau) &= \omega_i^d(t) + C_i^\theta \theta_i^e(t, \tau) + v_i^d(t) \frac{\sin \theta_i^e(t, \tau)}{\theta_i^e(t, \tau)} \frac{K}{\alpha_i(t, \tau)} C_i^y \left[y_i^e(t, \tau) + \sum_{j=1, j \neq i}^n C_{ij}^y [y_i^e(t, \tau) - y_j^e(t, \tau)] \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

con

$$\alpha_i(t, \tau) = \sqrt{K^2 + x_i^{e2}(t, \tau) + y_i^{e2}(t, \tau) + \sum_{j=1, j \neq i}^n (x_i^e(t, \tau) - x_j^e(t, \tau))^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^n (y_i^e(t, \tau) - y_j^e(t, \tau))^2}$$

La dinámica del error presentadas en la ecuación (3.5) ahora contiene una retroalimentación con el control retardo (ecuaciones (3.13)) y puede expresarse de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^e(t, \tau) &= \omega_i(t, \tau)y_i^e(t) - v_i(t, \tau) + v_i^d(t) \cos \theta_i^e(t) \\ \dot{y}_i^e(t, \tau) &= -\omega_i(t, \tau)x_i^e(t) + v_i^d(t) \sin \theta_i^e(t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\dot{\theta}_i^e(t, \tau) = \omega_i^d(t) - \omega_i(t, \tau) \quad (3.15)$$

Un procedimiento propuesto en [Sedova *et al.* (2007)] para analizar la estabilidad del control con retardo consiste en los siguientes pasos:

1. Desacoplar la dinámica del error en subsistemas más pequeños. Por ejemplo, en posición $\dot{x}_i^e(t, \tau)$, $\dot{y}_i^e(t, \tau)$ y orientación $\dot{\theta}_i^e(t, \tau)$.
2. Considerando el control $\omega_i(t, \tau)$ se comprueba que la solución del subsistema $\dot{\theta}_i^e(t, \tau)$ es uniformemente asintóticamente estable.
3. Reemplazar la variable $\theta_i^e(t, \tau)$ con cero en el subsistema (3.14) y estudiar la dinámica del nuevo subsistema obtenido.
4. Del nuevo subsistema de posición se dice que si existe un control $v_i(t, \tau)$ tal que demuestre que el subsistema nuevo es uniformemente asintóticamente estable entonces el control $(v_i(t, \tau), \omega_i(t, \tau))$ estabiliza en una solución igual a cero a todo el sistema en general conformado por las ecuaciones (3.14), (3.15) y por lo tanto se asegura que el sistema completo es uniformemente asintóticamente estable.

Con lo anterior mencionado se comienza analizando primeramente el subsistema $\dot{\theta}_i^e(t, \tau)$. Si consideramos que el sistema opera dentro de parámetros acotados en los cuales podemos suponer que $y_i^e(t, \tau) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$ esto reduce el control $\omega_i(t, \tau)$ de la expresión (3.13) a lo siguiente

$$\omega_i(t, \tau) = \omega_i^d + C_i^\theta \theta_i^e(t, \tau) \quad (3.16)$$

Sustituyendo el control (3.16) en el subsistema (3.15) se obtiene un nuevo subsistema de orientación de la forma

$$\dot{\theta}_i^e(t, \tau) = -C_i^\theta \theta_i^e(t, \tau) \quad (3.17)$$

Este nuevo subsistema de orientación es estable con $0 \leq C_i^\theta \leq \frac{\pi}{2\tau}$ [Hale (1984)]. Esto implica que $\theta_i^e(t, \tau)$ converge a cero para $i = 1, 2, \dots, n$. Por lo tanto se puede decir que

$$\text{Si } \{\dot{\theta}_i^e(t, \tau) = 0\} \Rightarrow \theta_i^e(t, \tau), y_i^e(t, \tau) = 0 \quad (3.18)$$

NOTA: La única condición para que se cumplan las implicaciones (3.18) es que $\theta_i^e(t, \tau)$ se mantenga dentro de valores pequeños a lo largo del tiempo

Sustituyendo las implicaciones (3.18) en el subsistema de posición (3.14) y considerando la retroalimentación de los controles $v_i(t, \tau), \omega_i(t, \tau)$ entonces se obtiene un nuevo subsistema de posición de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^e(t, \tau) &= \omega_i(t) y_i^e(t) - C_i^x \left[x_i^e(t, \tau) + \sum_{j=1, j \neq i}^n C_{ij}^x (x_i^e(t, \tau) - x_j^e(t, \tau)) \right] \\ \dot{y}_i^e(t, \tau) &= -\omega_i(t) x_i^e(t) \end{aligned} \quad (3.19)$$

3.4 Estabilidad para subsistema de posición mediante Lyapunov-Razumikhin para n robots

En esta subsección se demuestra la estabilidad del nuevo subsistema resultante (3.19) correspondiente a posición.

Considere la siguiente función candidata de Lyapunov.

$$V(x_e, y_e) = XPX^T \quad (3.20)$$

$$V(x_e, y_e) = X \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1(2n)} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2(2n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{(2n)1} & P_{(2n)2} & \cdots & P_{(2n)(2n)} \end{bmatrix} X^T$$

$$V(x_e, y_e) = X \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{bmatrix} X^T \quad (3.21)$$

donde

$$X = \begin{bmatrix} x_1^e(t) & x_2^e(t) & \cdots & x_n^e(t) & y_1^e(t) & y_2^e(t) & \cdots & y_n^e(t) \end{bmatrix}$$

$$P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

$$P_i \in \mathbb{R}^{2n}; \text{ para } i = 1, \dots, 2n$$

Expandiendo la función candidata de Lyapunov $V(x_e, y_e)$ (3.21) se obtiene

$$V(x_e, y_e) = (X \cdot P_1) x_1^e(t) + \dots + (X \cdot P_n) x_n^e(t) + (X \cdot P_4) y_1^e(t) + \dots + (X \cdot P_6) y_n^e(t) \quad (3.22)$$

Podemos reescribir el vector X por comodidad como

$$X = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n & z_{n+1} & z_{n+2} & \cdots & z_{2n} \end{bmatrix}.$$

donde la equivalencia de esta nueva representación se expresa de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ z_{n+1} \\ z_{n+2} \\ \vdots \\ z_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^e(t) \\ x_2^e(t) \\ \vdots \\ x_n^e(t) \\ y_1^e(t) \\ y_2^e(t) \\ \vdots \\ y_n^e(t) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Proponiendo la matriz P como:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & P_{1(n+1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & P_{2(n+2)} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P_{nn} & 0 & 0 & \cdots & P_{n(2n)} \\ P_{(n+1)1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & P_{(n+1)(n+1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{(n+2)2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & P_{(n+2)(n+2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P_{(2n)n} & 0 & 0 & \cdots & P_{(2n)(2n)} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

con

$$P_{ii} = \frac{1}{c^x}; \quad P_{(n+i)(n+i)} = \frac{c^x}{2(\omega_i^d)^2} + \frac{1}{c^x}; \quad P_{(n+i)i} = P_{i(n+i)} = -\frac{1}{2\omega_i^d} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

y en donde $C_i^x = c^x$ para $i = 1, 2, \dots, 2n$ y además $C_i^x > 0$, entonces el parámetro libre c^x se puede elegir lo suficientemente grande para que se cumpla la condición de una matriz diagonal estrictamente dominante [MathWorld.(2015)]. Posteriormente, si esta condición se cumple, los eigenvalores de la matriz P son positivos, entonces la función candidata de Lyapunov (3.20) es una función positiva definida.

Reescribiendo la función (3.22) en función del vector (3.23) se obtiene

$$V(x_e, y_e) = z_1 \left(\sum_{i=1}^{2n} z_i P_{i1} \right) + z_2 \left(\sum_{i=1}^{2n} z_i P_{i2} \right) + z_3 \left(\sum_{i=1}^{2n} z_i P_{i3} \right) + \dots + z_{2n} \left(\sum_{i=1}^{2n} z_i P_{i2n} \right) \quad (3.25)$$

Considerando la simetría de la matriz P podemos decir que $z_i z_j P_{ij} = z_j z_i P_{ji}$ por lo tanto la función V se reduce a

$$V(x_e, y_e) = \sum_{i=1}^{2n} P_{ii} (z_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=i+1}^{2n} P_{ij} z_i z_j \quad (3.26)$$

NOTA: Ver detalles sobre el desarrollo de la función de Lyapunov en el Apéndice A.1

Considerando al vector de estado φ_1 definido como $\varphi_1 = \begin{bmatrix} x_e & y_e \end{bmatrix}$, la derivada de la función de Lyapunov $V(x_e, y_e)$ de acuerdo a [Sadowska *et al.* (2011)] queda expresada como

$$\dot{V}(t, \varphi_1) = \sum_{i=1}^{2n} \left[V_i' - \left(2x_i^e(t) - \frac{c^x}{\omega_i^d(t)} y_i^e(t) \right) \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n C_{ij}^x (x_i^e(t, \tau) - x_j^e(t, \tau)) \right) \right] \quad (3.27)$$

donde

$$V_i' = -x_i^{e2}(t) - y_i^{e2}(t) - \left(2x_i^e(t) - \frac{c^x}{\omega_i^d(t)} y_i^e(t) \right) (x_i^e(t, \tau) - x_i^e(t)) \quad (3.28)$$

NOTA: Ver más detalles sobre el desarrollo de la derivada de la función de Lyapunov en el Apéndice A.2

Si se considera al sistema en las condiciones iniciales, entonces $\dot{V}(t, \varphi)$ puede expresarse como

$$\dot{V}(t, \varphi_1(0)) = \sum_{i=1}^{2n} \left[V_i'(t, \varphi_1(0)) - 2 \left(x_i^e(0) - \frac{c^x}{2\omega_i^d} y_i^e(0) \right) \beta(0, \tau) \right] \quad (3.29)$$

con

$$\beta(0, \tau) = \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n C_{ij}^x (x_i^e(-\tau) - x_j^e(-\tau)) \right)$$

donde

$$V_i'(t, \varphi_1(0)) = -(x_i^e)^2(0) - (y_i^e)^2(0) - \left(2x_i^e(0) - \frac{c^x}{\omega_i^d} y_i^e(0) \right) (x_i^e(-\tau) - x_i^e(0)) \quad (3.30)$$

En [Sedova *et al.* (2007)] se demuestra que la función $V_1'(t, \varphi_i(0))$ de la ecuación (3.30) es negativa definida.

Al sustituir la ecuación (3.30) en la ecuación (3.29) y desarrollando se obtiene

$$\dot{V}(t, \varphi_1) = \sum_{i=1}^{2n} \left[-x_i^{e2}(t) - y_i^{e2}(t) - \left(2x_i^e(t) - \frac{c^x}{\omega_i^d(t)} y_i^e(t) \right) \beta(t, \tau) \right] \quad (3.31)$$

con

$$\beta(t, \tau) = \left(x_i^e(t, \tau) + \sum_{j=1, j \neq i}^n C_{ij}^x (x_i^e(t, \tau) - x_j^e(t, \tau)) - x_i^e(t) \right)$$

La ecuación (3.31) es similar a la ecuación (3.30) y de la cual se ha demostrado que es negativa definida. La única diferencia es el término extra $\sum_{j=1, j \neq i}^n C_{ij}^x (x_i^e(t, \tau) - x_j^e(t, \tau))$ en la ecuación (3.31). Sin embargo, de acuerdo a la condición mostrada en el Apéndice A.3 todos los términos con retardo se encuentran acotados de tal manera que si $\max_{-2\tau \leq s \leq 0} V(x_i^e(t+s), y_i^e(t+s))$ es monótonicamente decreciente entonces los términos con retardo también lo son, así que los términos cruzados $\sum_{j=1, j \neq i}^n C_{ij}^x (x_i^e(t, \tau) - x_j^e(t, \tau)) \rightarrow 0$. Por lo tanto, si $\sum_{j=1, j \neq i}^n C_{ij}^x (x_i^e(t, \tau) - x_j^e(t, \tau)) \rightarrow 0$ entonces $\dot{V}(t, \varphi_1(0)) \rightarrow V_i'(t, \varphi_1(0))$. Por su puesto

existe un retardo τ_{max} en el cual las implicaciones anteriores son válidas, fuera de este rango no se puede asegurar la estabilidad del sistema. **Este τ_{max} es el retardo máximo que el sistema soporta usando ganancias constantes.**

Es importante mencionar que la prueba de estabilidad mostrada anteriormente se realizó considerando las ganancias constantes C_i^x, C_i^y, C_i^θ por lo tanto el rango de retardo es pequeño dentro del cual la prueba de estabilidad es válida.

3.5 Diseño de ganancias adaptables

Esta sección presenta el diseño de las ganancias adaptables que se proponen para atenuar los efectos negativos del retardo. Estas ganancias sustituyen a las ganancias constantes C_i^x, C_i^y, C_i^θ del control propuesto en la expresión (3.10). Dichas ganancias adaptables se obtienen mediante el método de la velocidad del gradiente presentado en la sección (2.4).

Considerando al vector $e_\tau = [x_i^e(t, \tau) \ y_i^e(t, \tau) \ \theta_i^e(t, \tau)]^T$ conformado por los errores de trayectoria definidos en las expresiones (3.12), y considerando una dinámica totalmente retardada

$$\dot{e}_\tau = \begin{bmatrix} \dot{x}_i^e(t, \tau) \\ \dot{y}_i^e(t, \tau) \\ \dot{\theta}_i^e(t, \tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_i(t, \tau)y_i^e(t, \tau) - v_i(t, \tau) + v_i^d(t) \cos \theta_i^e(t, \tau) \\ -\omega_i(t, \tau)x_i^e(t, \tau) + v_i^d(t) \sin \theta_i^e(t, \tau) \\ \omega_i^d(t, \tau) - \omega_i(t, \tau) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

se propone entonces la siguiente funcional

$$Q = \frac{1}{2} e_\tau^T e_\tau$$

su derivada se define como

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= e_\tau^T \dot{e}_\tau \\ \dot{Q} &= x_i^e(t, \tau) \dot{x}_i^e(t, \tau) + y_i^e(t, \tau) \dot{y}_i^e(t, \tau) + \theta_i^e(t, \tau) \dot{\theta}_i^e(t, \tau) \end{aligned}$$

Sustituyendo la dinámica retardada del error expresada en las ecuaciones (3.32).

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= x_i^e(t, \tau) (\omega_i(t, \tau) y_i^e(t, \tau) - v_i(t, \tau) + v_i^d(t) \cos \theta_i^e(t, \tau)) \\ &\quad + y_i^e(t, \tau) (-\omega_i(t, \tau) x_i^e(t, \tau) + v_i^d(t) \sin \theta_i^e(t, \tau)) + \theta_i^e(t, \tau) (\omega_i^d - \omega_i(t, \tau))\end{aligned}$$

Cerrando el lazo con los controles $v_i(t, \tau)$, $\omega_i(t, \tau)$ descritos en las ecuaciones (3.13) se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= -C_i^x x_i^e(t, \tau) \left[x_i^e(t, \tau) + \sum_{j=1, j \neq i}^n C_{ij}^x [x_i^e(t, \tau) - x_j^e(t, \tau)] \right] + y_i^e(t, \tau) v_i^d(t) \sin \theta_i^e(t, \tau) \\ &\quad - C_i^\theta \theta_i^{e2}(t, \tau) - \left(\frac{K C_i^y v_i^d(t) \sin \theta_i^e(t, \tau)}{\theta_i^e(t, \tau) \alpha(t, \tau)} \right) \left(y_i^e(t, \tau) + \sum_{j=1, j \neq i}^n C_{ij}^y [y_i^e(t, \tau) - y_j^e(t, \tau)] \right)\end{aligned}\tag{3.33}$$

con

$$\alpha(t, \tau) = \sqrt{K^2 + x_i^{e2}(t, \tau) + y_i^{e2}(t, \tau) + \sum_{j=1, j \neq i}^n (x_i^e(t, \tau) - x_j^e(t, \tau))^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^n (y_i^e(t, \tau) - y_j^e(t, \tau))^2}$$

El gradiente de \dot{Q} respecto de cada una de las ganancias constantes queda expresado de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\nabla_{c_x} \dot{Q} &= -x_i^{e2}(t, \tau) - x_i^e(t, \tau) \sum_{j=1, j \neq i}^n C_{ij}^x [x_i^e(t, \tau) - x_j^e(t, \tau)] \\ \nabla_{c_y} \dot{Q} &= - \left(\frac{K C_i^y v_i^d(t) \sin \theta_i^e(t, \tau)}{\theta_i^e(t, \tau) \alpha(t, \tau)} \right) \left(y_i^e(t, \tau) + \sum_{j=1, j \neq i}^n C_{ij}^y [y_i^e(t, \tau) - y_j^e(t, \tau)] \right) \\ \nabla_{c_\theta} \dot{Q} &= -\theta_i^{e2}(t, \tau)\end{aligned}\tag{3.34}$$

Finalmente la velocidad de cambio de cada una de las ganancias adaptables se obtiene mediante

$$\begin{aligned}
\dot{k}_i^x &= -\gamma_x \nabla_{c_x} \dot{Q} \\
\dot{k}_i^y &= -\gamma_y \nabla_{c_y} \dot{Q} \\
\dot{k}_i^\theta &= -\gamma_\theta \nabla_{c_\theta} \dot{Q}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Las ganancias adaptables que se introducen al control están dadas por

$$\begin{aligned}
k_i^x &= \int \dot{k}_i^x dt \\
k_i^y &= \int \dot{k}_i^y dt \\
k_i^\theta &= \int \dot{k}_i^\theta dt
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Estas ganancias son las que sustituyen a las ganancias constantes C_i^x, C_i^y, C_i^θ respectivamente. Como se puede observar en todo el procedimiento anterior, estas ganancias adaptables están en función de los estados retardados del sistema de tal manera que si los errores $(x_i^e(t, \tau), y_i^e(t, \tau), \theta_i^e(t, \tau)) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$ entonces la velocidad de cambio de las ganancias $(\nabla_{c_x} \dot{Q}, \nabla_{c_y} \dot{Q}, \nabla_{c_\theta} \dot{Q}) \rightarrow 0$. La sustitución de estas ganancias adaptables en el control con retardo (3.13) queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
v_i(t, \tau) &= v_i^d(t) \cos \theta_i^e(t, \tau) + \mathbf{k}_i^x \left[x_i^e(t, \tau) + \sum_{j=1, j \neq i}^n C_{ij}^x [x_i^e(t, \tau) - x_j^e(t, \tau)] \right] \\
\omega_i(t, \tau) &= \omega_i^d(t) + \mathbf{k}_i^\theta \theta_i^e(t, \tau) + v_i^d(t) \frac{\sin \theta_i^e(t, \tau)}{\theta_i^e(t, \tau)} \frac{K}{\alpha_i(t, \tau)} \mathbf{k}_i^y \left[y_i^e(t, \tau) + \sum_{j=1, j \neq i}^n C_{ij}^y [y_i^e(t, \tau) - y_j^e(t, \tau)] \right]
\end{aligned} \tag{3.37}$$

La validación de estas ganancias adaptables se llevó a cabo en la sincronización de dos grupos de robots móviles trabajando bajo retardo en la transferencia de datos. En el Capítulo 6 se muestran los resultados experimentales de esta validación.

Capítulo 4

Plataforma experimental

La plataforma experimental se desarrolló con el objetivo de probar los diferentes algoritmos usados en la sincronización de grupos de robots móviles, y validar principalmente la estrategia de control propuesta para solucionar el problema central en este trabajo.

A continuación se describen los elementos que constituyen la plataforma experimental con sus respectivas especificaciones.

La cámara utilizada es una cámara uEye modelo UI-1220SE-M-GL que presenta las siguientes características:

1. Sensor CMOS Mono
2. Resolución 752x480
3. Máximo 87 fps
4. Interfaz USB 2.0
5. Montaje de lente C



Figura 4.1: Cámara uEye

El lente utilizado por la cámara uEye es un lente Navitar con número de serie NMV-5M23 el cual tiene las principales características.

1. Distancia focal de 5 mm.
2. Elimina los problemas de distorsión en la imagen.



Figura 4.2: Lente Navitar.

Los robots utilizados para los experimentos son robots móviles de la marca “iRobot”

1. Velocidad lineal máxima de 0.5 m/s.
2. Diámetro de 34 cm.
3. Cuenta con más de 30 sensores.
4. Puerto de expansión de 25 pines al que se puede añadir hardware externo como sensores, actuadores, conexiones inalámbricas, ordenadores, cámaras, u otro.
5. La batería permite un funcionamiento continuo de 1.5 horas aproximadamente.



Figura 4.3: iRobot rumba 4400

El funcionamiento general de la plataforma experimental se describe en el esquema de la Figura 4.4.

La cámara proporciona una imagen en cada iteración del programa. El algoritmo de visión utiliza esta imagen para llevar a cabo la detección de las marcas correspondientes y poder diferenciar a cada robot. Con dicha detección, el algoritmo se encarga de obtener el estado (posición y orientación) de cada robot. Posteriormente, el control requiere el estado obtenido

Respecto al software se usó:

1. Ubuntu 11.10
2. Lenguaje de programación c++
3. Compilador QT creator 4.0



por el algoritmo de visión para calcular las velocidades a nivel de rueda que los robots necesitan para converger a la trayectoria deseada. Las velocidades calculadas por el control son enviadas a los robots mediante el protocolo de comunicación bluetooth. Finalmente, la cámara vuelve a tomar una nueva imagen, repitiéndose así el proceso de retroalimentación del sistema.

4.1 Sistema de Visión

El sistema de visión está conformado por una cámara fija en cielo, colocada a una altura de $2.1m$. del plano de trabajo y alcanza a cubrir un área de trabajo de $2.3m. \times 1.7m$. (Figura 4.5a). La cámara funciona como un sensor que proporciona al control una retroalimentación de la posición y orientación de cada robot en cada instante de tiempo. Para la detección del estado del robot se utilizan marcas que funcionan como identificadores para los robots. Estos identificadores son marcas diferentes entre sí colocadas sobre cada robot. El proceso de clasificación de las marcas para diferenciar a los robots se lleva a cabo mediante el algoritmo de visión.

4.2 Algoritmo de visión

El tratamiento de las imágenes se lleva a cabo utilizando la biblioteca de OpenCV. Dicho tratamiento se describe con ayuda del diagrama de la Figura 4.7.

La imagen proporcionada por la cámara se encuentra ya en escala de grises, a esta imagen se le aplica un filtro Gaussiano para atenuar un poco cualquier ruido que pueda estar presente en la imagen. Posteriormente la imagen es binarizada con el objetivo de poder resaltar determinadas

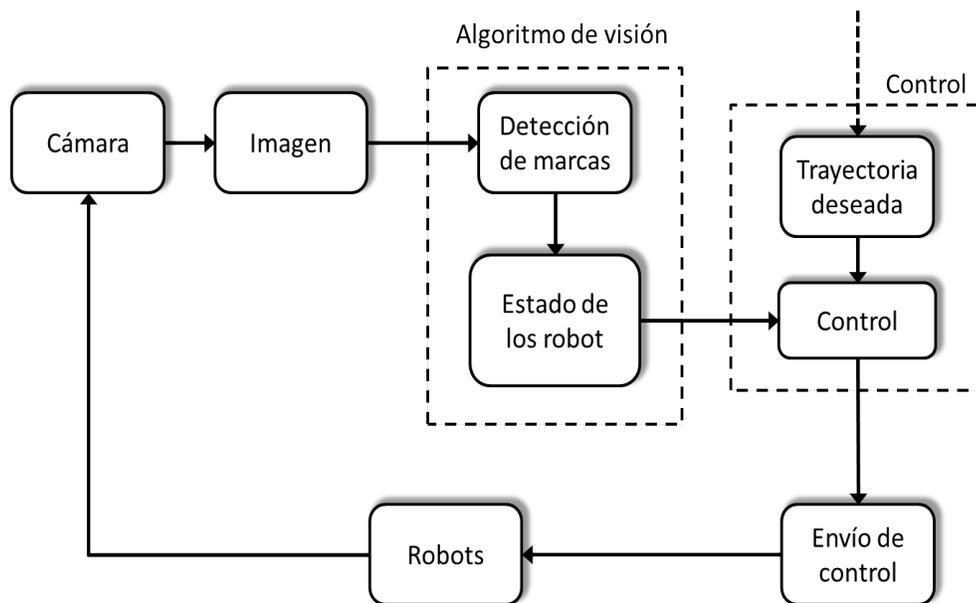
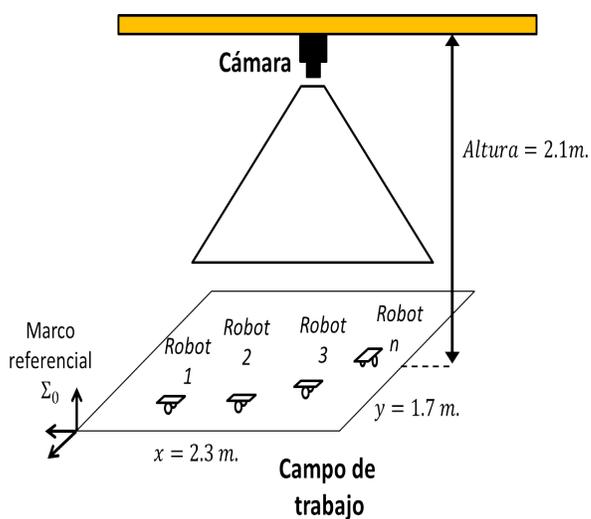


Figura 4.4: Esquema general del funcionamiento de plataforma experimental



(a) Esquema general de plataforma experimental



(b) Plataforma experimental real

Figura 4.5: Plataforma experimental

regiones de interés y poder atenuar las regiones de poco interés. En este caso, las regiones de interés corresponden a las marcas de cada robot.



Figura 4.6: Contraste de las marcas

Para este punto, es importante que exista un buen contraste entre la marca y el fondo sobre el cual se coloca dicha marca. Por ello, las marcas son de color negro y fueron colocadas en los robots sobre una plataforma de color blanco, para asegurar un contraste máximo. Figura 4.6.

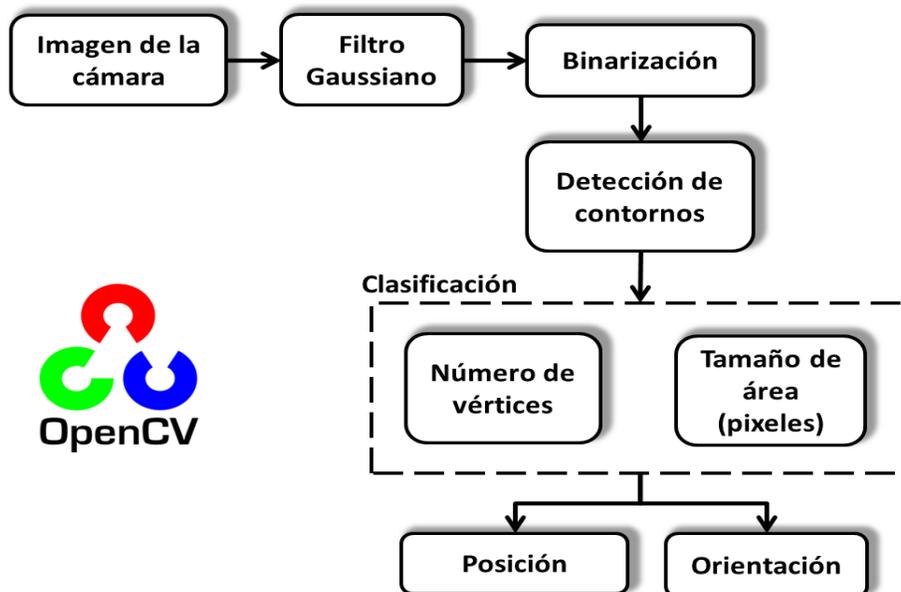


Figura 4.7: Funcionamiento de algoritmo de visión

En la Figura 4.8 se observa un ejemplo de la imagen del campo de trabajo capturada por la cámara mientras que en la Figura 4.9 se observa la misma imagen pero ya procesada. Como resultado de este procesamiento se obtiene una imagen binarizada en la que se puede observar solamente las regiones de interés correspondientes a las marcas de cada robot (color blanco) mientras que el resto de la imagen que no es de interés se encuentra de color negro.

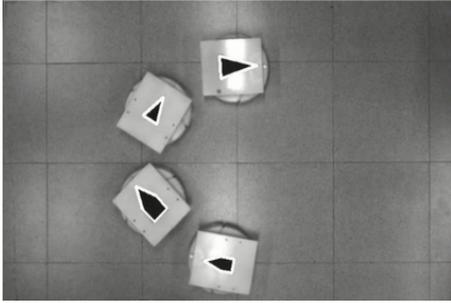


Figura 4.8: Imagen real

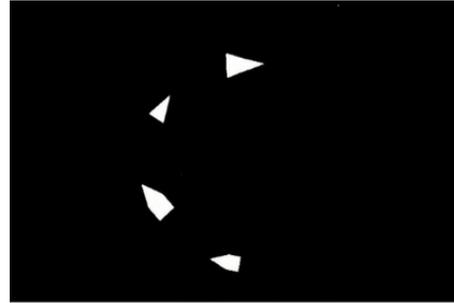


Figura 4.9: Imagen binarizada

Posteriormente, sobre la imagen binarizada presentada en la Figura 4.9, se aplica un proceso de detección de contornos para caracterizar las regiones de interés de la imagen. Con la detección de los contornos que representan a las marcas de los robots, se lleva a cabo el proceso de clasificación para diferenciar a cada una de las marcas.

En la Tabla 4.1 se muestra el algoritmo de visión implementado. En el paso 1, el filtro Gaussiano es implementado utilizando la función *cvSmooth*, la salida de esta función es una imagen suavizada (ruido atenuado), en el paso 2 la binarización de la imagen se realiza con ayuda de la función *cvThreshold*, la salida de esta función es una imagen en blanco y negro. En la detección de contornos del paso 3 se utiliza la función *cvFindContours*, como argumento de salida se obtiene la variable *Cont* que representa el conjunto de contornos encontrados en la imagen y \vec{v}_n representa los vértices de cada contorno encontrado. En el paso 4 se obtiene el área de los contornos (*Cont*) obtenidos en el paso anterior usando la función *cvContourArea*, como argumento de salida se obtiene el área en píxeles para cada contorno encontrado en la imagen. En el paso 5 se realiza la clasificación de las marcas que identifican a cada robot. El proceso de clasificación se describe más a detalle en la Subsección 4.2.1. Finalmente, el estado $[x_i \ y_i \ \theta_i]$, del *i*-ésimo robot es obtenido con la función *Estado_robot*, la cual se describe de forma más detallada en la Subsección 4.2.2.

Tabla 4.1: Algoritmo de visión

Algoritmo: Algoritmo general de Visión

Entrada: *Imagen*

Salida: Estado $X_i = [x_i \ y_i \ \theta_i]^T$ correspondiente al *i*-ésimo robot

```

1   Imagen ← GaussFilter(Imagen)
2   Imagen ← Binarización(Imagen)
3   (Conti,  $\vec{v}_n$ ) ← Detección de contornos(Imagen)
4    $A_i$  ← Área de contornos(Conti)
5   Roboti ← Clasificación( $A_i$ ,  $\vec{v}_n$ )
6   for i = 0 hasta número total de robots
7        $X_i$  ← Estado_robots(Imagen,  $\vec{v}_n$ )
8   end

```

4.2.1 Clasificación

El proceso de clasificación realmente es muy sencillo. Después de la detección de contornos de la imagen el algoritmo toma dos parámetros de clasificación para diferenciar las marcas que se asigna a cada robot. Los parámetros de clasificación corresponden al área en píxeles y el número de vértices. Las marcas que se han utilizado para poder diferenciar a los robots son las marcas presentadas en la Figura 4.10. Cada una de estas marcas es puesta sobre el robot y funciona cómo identificadores de cada robot. Los parámetros de discriminación entre estas marcas son dos:

- Área en píxeles que ocupan las marcas en la imagen.
- Número de vértices que conforman a las marcas.

Por lo tanto, tomando en cuenta la Figura 4.10, las *marcas a) y b)* conformadas por 3 vértices se diferencian de las *marcas c) y d)* que están conformadas por 5 vértices, mientras que las *marcas a) y b)* pueden diferenciarse a su vez por el área, notablemente la *marca a)* es

más grande que la *marca b)*. Similarmente se puede diferenciar a la *marca c)* de la *marca d)* por el área.

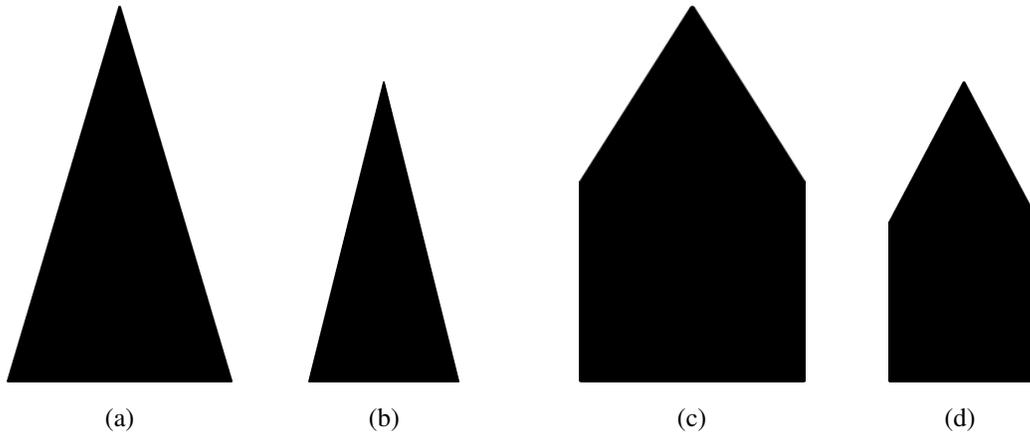


Figura 4.10: Marcas usadas para la detección de los robots

4.2.2 Obtención del estado del robot

A partir de las marcas de la Figura 4.10, el algoritmo de la Tabla 4.2 puede obtener el estado del robot $X = [x \ y \ \theta]^T$ en cada instante de tiempo. El funcionamiento del dicho algoritmo se explica a continuación. Respecto a la obtención de la posición, el algoritmo hace un simple promedio de todos los vértices de la marca para obtener el centroide. Este proceso se describe desde el paso 3 al 5. En la Figura 4.11 se muestra un ejemplo de una marca en forma triangular y sus respectivos vértices (P_1, P_2, P_3). El punto central C representa el centroide.

Respecto a la orientación del robot, es necesario obtener el vértice más lejano respecto del centroide del robot, por lo tanto en el paso 8 el algoritmo checa las distancias Euclidianas del vector formado entre el centroide y cada uno de los vértices, posteriormente en la línea 9 el algoritmo almacena el vértice más lejano respecto del centroide de la marca. Finalmente en la línea 12 se obtiene la orientación del vector formado entre el centroide del robot y el vértice más alejado de la marca. En la Figura 4.12 se observa un ejemplo de la obtención de la orientación de una marca en forma triangular. En el caso de esta figura, el vértice P_3 es el vértice más alejado del centroide C y θ la orientación del vector $\overrightarrow{CP_3}$.

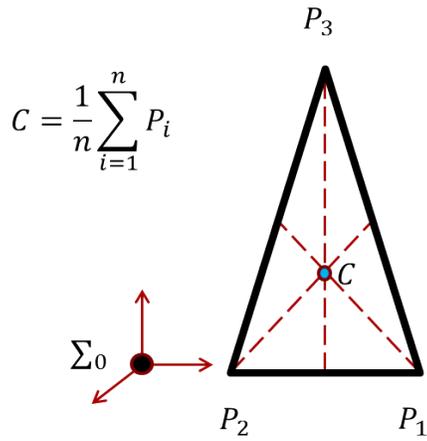


Figura 4.11: Ejemplo de obtención de centroide de una marca

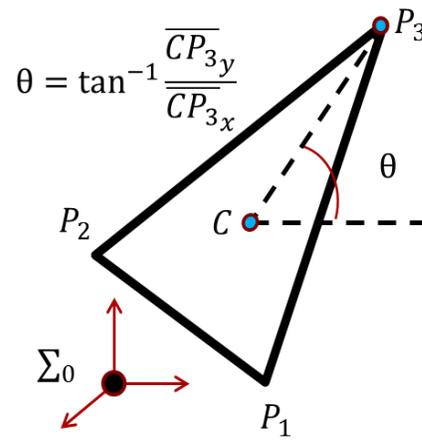


Figura 4.12: Ejemplo de obtención de orientación de una marca

Las ventajas que ofrece este algoritmo de visión para obtener el estado de los robots son las siguientes:

- Es robusto ante cambios de iluminación.
- Ofrece flexibilidad para agregar fácilmente nuevos polígonos y usarlos como marcas.
- Su procesamiento es ligero.
- Su funcionamiento es sencillo de entender.
- Es sencillo de implementar.

Tabla 4.2: Algoritmo para la obtención del estado

Algoritmo: $X = \text{Estado_robots}(\text{Imagen}, \vec{v}_n)$

Entrada: Imagen

\vec{v}_n , Es el n -ésimo vértice de la marca

Salida: \vec{C} , Es el centro de la marca en la imagen

θ , Es la orientación de la marca respecto al eje X de la imagen

```

1    $\vec{C} \leftarrow 0$ 
2    $\theta \leftarrow 0$ 
    %Posición
3   Para todo  $\vec{v}_n$  hacer
4        $\vec{C} = \vec{v}_n + \vec{C}$ 
5   end
6    $\vec{C} = \vec{C} / \text{número total de vértices}$ 
    %Orientación
7    $\text{magn}_{min} \leftarrow \text{Valor grande}$ 
8   Para todo  $\vec{v}_n$  hacer
9        $\text{magn} = \left| \vec{C} - \vec{v}_n \right|$ 
10      Si  $\text{magn} < \text{magn}_{min}$  entonces
11           $\text{magn}_{min} = \text{magn}$ 
12           $\vec{V}_{cercano} = \vec{v}_n$ 
13      end
14       $\theta = \arctan\left(\frac{\vec{V}_{cercano}(y) - \vec{C}(y)}{\vec{V}_{cercano}(x) - \vec{C}(x)}\right)$ 
15       $X \leftarrow (\vec{C}, \theta)$ 
15      return  $X$ 

```

4.2.3 Restricciones para elegir identificadores de los robots

Una flexibilidad de este método implementado para la obtención del estado del robot mediante marcas es que se pueden crear tantos polígonos como se deseen y usarlos como marcas para la identificación de los robots diferenciándolas con sólo variar su área y/o el número de vértices. El único requisito que deben de cumplir dichos polígonos para usarlos como marcas es que deben contar con un único vértice que se encuentre más alejado del centroide que el resto de los vértices. Por lo tanto, un cuadrado no podría ser utilizado como una marca para los robots, puesto que todos sus vértices se encuentran a la misma distancia del centroide y de esta manera se podría obtener la posición pero no la orientación del robot.

4.3 Calibración del sistema de visión

La calibración es a prueba y error. La idea consiste en encontrar un factor de escala entre el plano de la imagen y el plano de trabajo. Para ello se ha definido el siguiente procedimiento.

1. Buscar coplanaridad

En esta paso es necesario orientar la cámara de tal manera que podamos colocar el plano de la imagen lo más coplanar posible al plano de trabajo de la Figura 4.13. El reto de este paso es encontrar la mejor pose de la cámara que cumpla con esta coplanaridad entre los planos. Es en este paso en donde se hace énfasis en la frase “prueba y error”

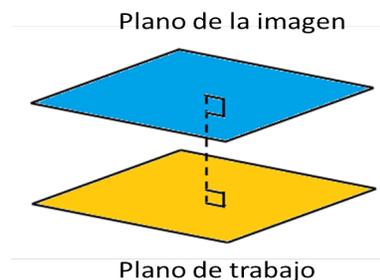


Figura 4.13: Coplanaridad entre planos

2. Buscar factor de escala

Se busca un factor de escala que relacione de forma proporcional los pixeles en metros.

$$A = \alpha B \quad (4.1)$$

donde A representa la distancia en metros, B representa la distancia en píxeles y α representa el factor de escala. Para encontrar el factor de escala se usan dos marcas cualesquiera de la Figura 4.10 y se colocan a una distancia fija conocida en metros en el campo de trabajo, tal como se muestra en la Figura 4.14. Posteriormente, en la imagen proporcionada por la cámara se busca la distancia en píxeles entre ambas marcas, de tal manera que de la ecuación (4.1), el factor de escala se obtiene como:

$$\alpha = \frac{A}{B}$$

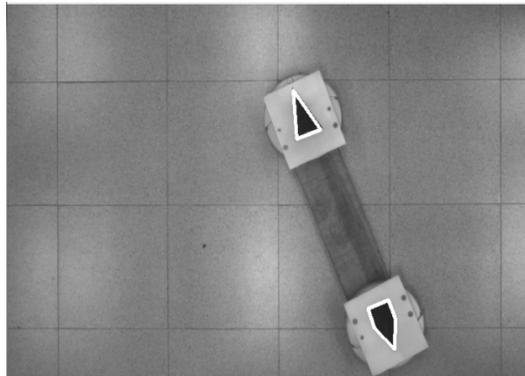


Figura 4.14: Colocación de los robots para obtener factor de escala

3. Muestreo del campo de trabajo

Consiste básicamente en repetir el paso anterior n número de veces (recomendable entre 10 y 15 veces) pero variando la posición de las marcas a lo largo y ancho del campo de trabajo de forma distribuida, asegurando que la distancia entre las marcas se mantenga constante. En cada medición se obtendrá un factor de escala diferente aunque idealmente no debe de existir una gran variación.

4. Factor de escala final

Finalmente, se obtiene un promedio del conjunto de factores de escala encontrados en el

paso anterior.

$$\alpha_{final} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \alpha_i$$

En la Tabla 4.3 se muestra el conjunto de datos obtenidos tras llevar a cabo los pasos para calibrar el sistema de visión descritos anteriormente tomando 13 muestras del campo de trabajo tal como se describe en el paso 3 (Muestreo del campo de trabajo). De acuerdo a la calibración realizada y a los datos de la Tabla 4.3, se obtuvo un promedio del error igual a 1.1 cm. relativamente pequeño considerando que el desplazamiento de los robots se mide en metros y con una desviación estándar de 1.13.

Tabla 4.3: Datos de calibración

Medición real (cm.)	Medición obtenida (cm.)
113.5	114.3
113.5	115.3
113.5	113.7
113.5	116.5
113.5	115.5
113.5	114.8
113.5	113.8
113.5	114.1
113.5	112.5
113.5	112.8
113.5	113.9
113.5	114.4
113.5	115.3
113.5	112.9

Promedio del error (cm.)	Desviación Estándar
1.1	1.13

Capítulo 5

Marco Metodológico

En este capítulo se describe la estructura de los experimentos que se llevaron a cabo para poder validar la estrategia de control planteada en el Capítulo 3.

5.1 Idea General

El experimento para poder validar el conjunto de ganancias adaptables presentadas en las ecuaciones (3.36) que compensan los efectos negativos del retardo consistió en sincronizar dos grupos de robots que se encontraban a distancia. Un grupo de robots localizados en México en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV) Unidad Saltillo y el otro grupo de robots en la Universidad Tecnológica de Eindhoven localizada en Holanda. La idea de sincronizar dos grupos de robots a distancia fue para tener un comportamiento natural del problema de retardo en la comunicación. La idea planteada inicialmente se puede apreciar en la Figura 5.1, el lado derecho del esquema representa el grupo de robots de Holanda, mientras que el lado izquierdo representa el grupo de robots de México. La comunicación entre los dos grupos de robots se realizó utilizando el protocolo de comunicación TCP/IP.

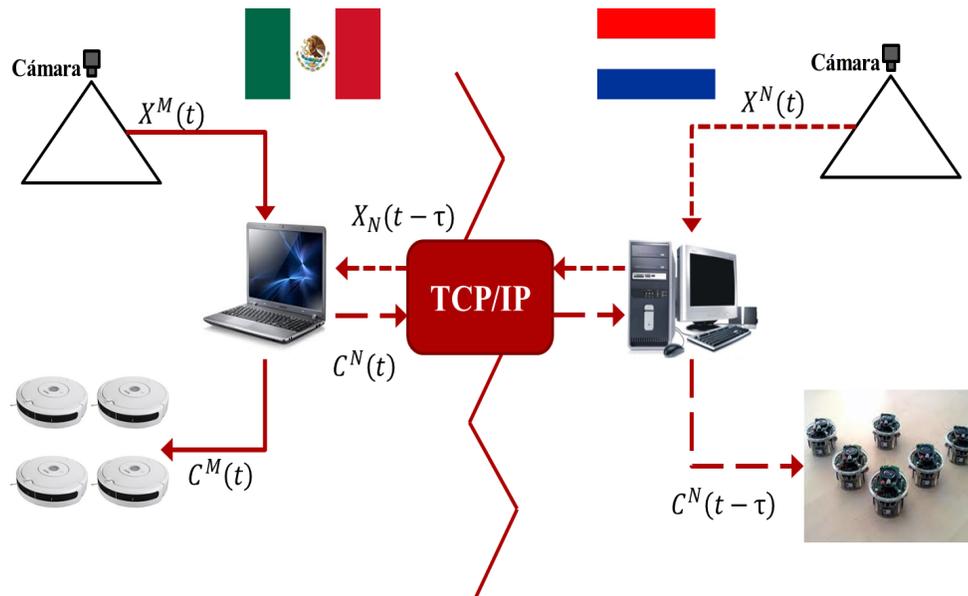


Figura 5.1: Funcionamiento general de plataforma experimental

5.1.1 Control centralizado

El control para este experimento se consideró “centralizado” debido a que todo el cómputo se realizó en una sola computadora servidor. La computadora servidor se encontraba en México y tuvo las siguientes funciones:

- Generar trayectoria deseada para el grupo de robots en México.
- Generar trayectoria deseada para el grupo de robots en Holanda.
- Calcular control para grupo de robots de México.
- Calcular control para grupo de robots de Holanda.
- Enviar señales de control calculadas al grupo de robots en México (Protocolo bluetooth).
- Enviar correspondiente control al grupo de robots en Holanda (Protocolo TCP/IP).

Por otra parte, la computadora “cliente” ubicada en Holanda tiene menos funciones a su cargo:

- Recibir control correspondiente a los robots de Holanda (Protocolo TCP/IP).
- Enviar el estado de cada robot de Holanda a México (Protocolo TCP/IP).
- Recibir control correspondiente al grupo de robots de Holanda (Protocolo TCP/IP).
- Enviar señales de control calculadas al grupo de robots de Holanda (Protocolo bluetooth).

5.1.2 Funcionamiento

Para poder explicar el funcionamiento de la idea general del experimento planteado, como material de apoyo adicional al esquema de la Figura 5.1, se presenta la Tabla 5.1 la cual muestra un conjunto de 10 etapas que representan la secuencia de acciones que se llevan a cabo de forma paralela tanto en la plataforma experimental de México como en Holanda (experimento 1).

Tabla 5.1: Etapas del experimento

Etapa	Plataforma México	Plataforma Holanda
1	Obtención del estado $X^M(t)$	Obtención del estado $X^H(t)$
2	Espera estado de robots de Holanda	Envía estado $X^H(t)$ del grupo de robots de Holanda
3	Retardo de recepción de estado τ_r	
4	Recibe estado retardado $X^H(t - \tau_r)$	Espera el control $C^H(t)$
5	Calcula control $C^M(t)$ y $C^H(t)$ para el grupo de robots de México y Holanda respectivamente	Espera el control $C^H(t)$
6	Envía control a grupo de robots de México mediante bluetooth, envía control a grupo de robots de Holanda mediante TCP/IP	Espera el control $C^H(t)$
7	Retardo de envío de control τ_e	
8	Ejecuta control $C^M(t)$ en los robots de México	Recibe control retardado $C^H(t - \tau_c)$ para grupo de robots de Holanda
9	Ejecuta control $C^M(t)$ en los robots de México	Envía control $C^H(t - \tau_c)$ a grupo de robots de Holanda mediante bluetooth
10	Ejecuta control $C^M(t)$ en los robots de México	Ejecuta control $C^H(t)$ en los robots de Holanda

5.2 Experimento 1: Sincronización de un simulador de robots móviles en Holanda con Robots reales en México bajo retardo natural

La primera prueba consistió en sincronizar el grupo de robots tipo iRobot localizados en México, con un grupo de robots simulados en una computadora localizada en Holanda. La computadora encargada de administrar la plataforma experimental de México fungió como computadora servidor, mientras que la computadora encargada de ejecutar el simulador fungió como computadora cliente. La comunicación entre Cliente-Servidor se realizó utilizando el protocolo de comunicación TCP/IP.

La Figura 5.2 muestra un diagrama general del experimento 1. El esquema de la derecha representa la plataforma experimental de México mientras que el esquema de la izquierda representa el simulador ejecutado en Holanda. El simulador fue desarrollado en Matlab y simula robots móviles de dimensiones iguales a las de los robots móviles tipo “Epucks” [E-PUCK.ORG (2004)]. El funcionamiento de este experimento coincide con el funcionamiento general del esquema de la Figura 5.1 y de la Tabla 5.1. Por lo tanto, la explicación de este experimento coincide con la explicación que se da en la Subsección 5.1.2. La única diferencia es que en este experimento los robots de Holanda son robots simulados, por lo tanto el estado de cada robot en Holanda se obtienen mediante integradores numéricos.

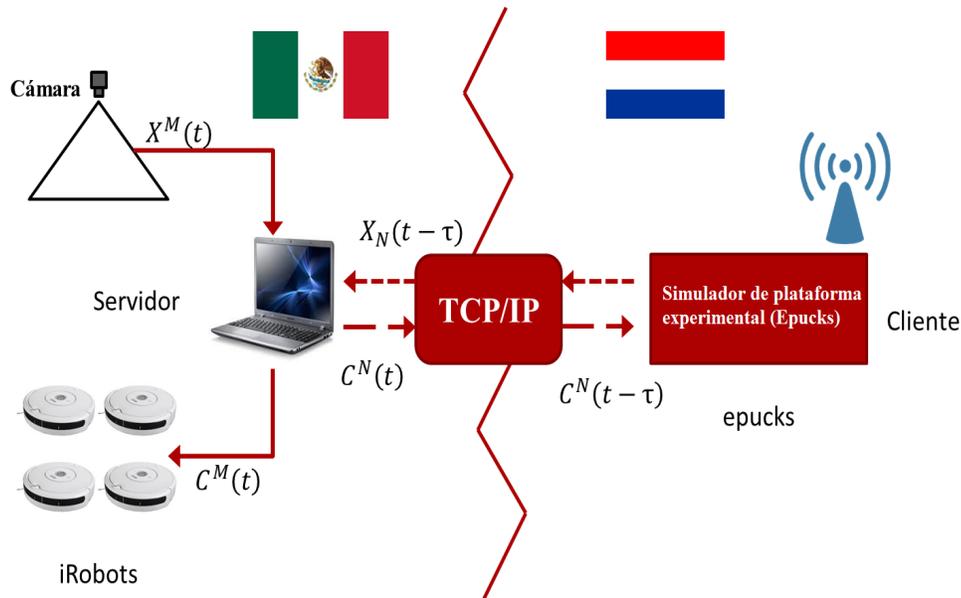


Figura 5.2: Funcionamiento de plataforma experimental (experimento 1)

5.3 Comunicación entre Holanda y México

La transferencia de datos entre el simulador de Holanda y la plataforma experimental de México se realizó mediante Internet usando el protocolo de comunicación TCP/IP. Como se puede observar en el diagrama de la Figura 5.3, en la conexión a Internet de la computadora Servidor localizada en México fue necesario utilizar una IP Homologada, esto para permitir la salida de datos de la red creada en CINVESTAV, pues de lo contrario los datos del Servidor podían compartirse dentro de la misma red pero no fuera de ella. Por otra parte, la conexión a Internet de la computadora cliente localizada en Holanda, se realizó vía inalámbrica. El conjunto de variables A_1, A_2, A_3 representa el grupo de robots móviles iRobot localizados en México, mientras que B_1, B_2, B_3 representa el conjunto de robots simulados en Holanda. El funcionamiento de este protocolo de comunicación se puede encontrar en la Sección 2.1.

Para tener una idea de la magnitud del retardo existente entre la comunicación de Holanda y México se hizo uso del comando “ping”, el cual sirve para el diagnóstico de redes en computadoras. El retardo promedio obtenido tras la ejecución de este comando fue de 320 ms. Sin embargo, cabe resaltar que el retardo es variable.

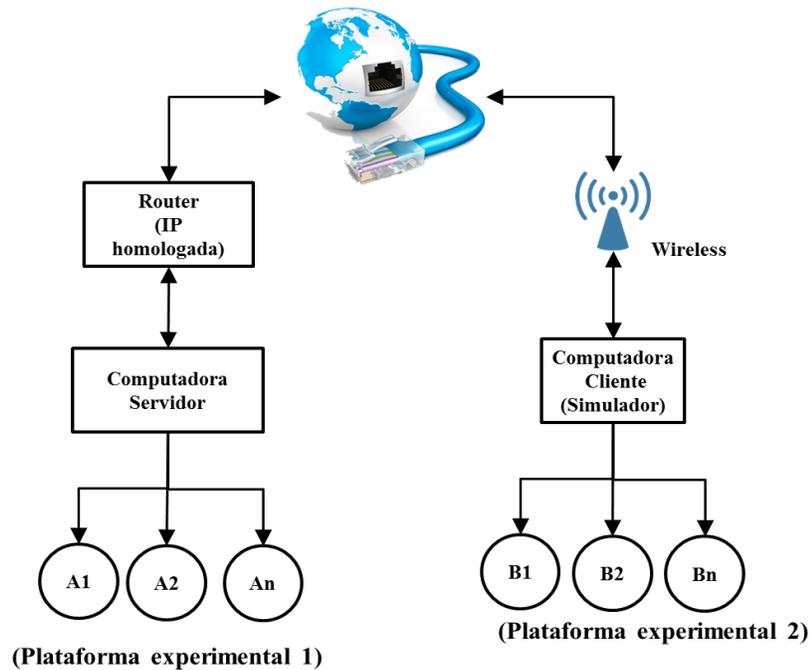


Figura 5.3: Conexión entre Holanda y México

5.4 Experimento 2: Sincronización de dos plataformas experimentales en México con retardo inducido

El segundo experimento está representado en el esquema de la Figura 5.4 y consistió en desarrollar dos plataformas experimentales en México (CINVESTAV Unidad Saltillo) utilizando robots móviles de tipo iRobot en ambas plataformas. Ambos grupos de robots se sincronizaron induciendo un retardo variable. La explicación de este experimento coincide con la explicación que se da en la Subsección 5.1.2, la única diferencia es que en este experimento los dos grupos de robots móviles son de tipo iRobot.

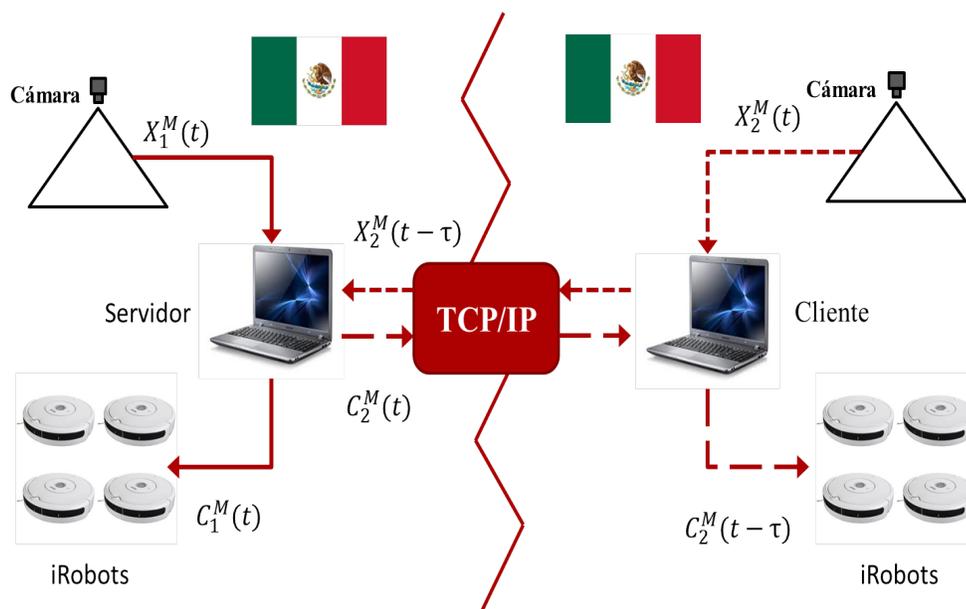


Figura 5.4: Funcionamiento de plataforma experimental (experimento 2)

Capítulo 6

Resultados y Conclusiones

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en este trabajo de tesis, donde se lleva a cabo la validación de las ganancias adaptables k_x, k_y, k_θ presentadas en las ecuaciones (3.36) considerando los valores de las constantes $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_\theta$ presentadas en la Tabla 6.1. Inicialmente, se realizó la validación mediante simulación y posteriormente, en base a la estructura de los dos experimentos descritos en el Capítulo 5.

Tabla 6.1: Constantes proporcionales para ganancias adaptables

γ_x	0.07
γ_y	20
γ_θ	0.01

6.1 Implementación de ganancias adaptables en simulación

Esta fue la primera prueba para la validación de las ganancias adaptables. El experimento consistió en replicar la misma simulación presentada en la Sección 2.5 pero esta vez sustituyendo las ganancias constantes del control por las ganancias adaptables, con lo cual se obtuvieron los siguientes resultados.

En la Figura 6.1 se observa como las oscilaciones de ambos robots han desaparecido, teniendo una trayectoria más definida y más cercana a la trayectoria de referencia. Así mismo,

se observa la misma perturbación inducida al robot 0 presentado en la Sección 2.5. Sin embargo, posterior a la perturbación el robot converge a la trayectoria referencia sin presentar oscilaciones.

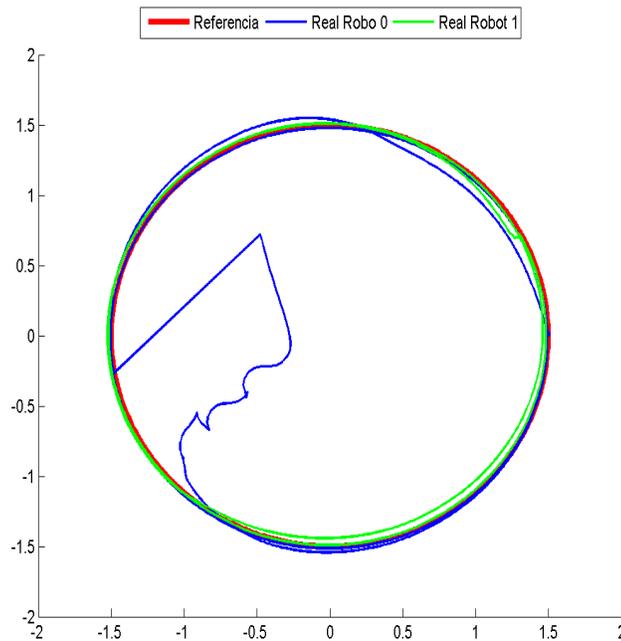


Figura 6.1: Trayectoria real Vs Trayectoria deseada

En la Figura 6.2 se observa los respectivos errores de trayectoria de los robots. Se puede apreciar que las oscilaciones en los errores se han atenuado considerablemente permitiendo que los errores converjan a cero. Se observa un sobre impulso en el segundo 40, relacionado a la perturbación inducida al robot 0. Después del sobre impulso se observa una transición oscilatoria. Sin embargo, eventualmente estas oscilaciones desaparecen y los errores convergen nuevamente a cero.

Finalmente en la Figura 6.3 puede observarse el comportamiento de las ganancias adaptables durante la simulación. Puede apreciarse el sobre impulsos de las ganancias adaptables

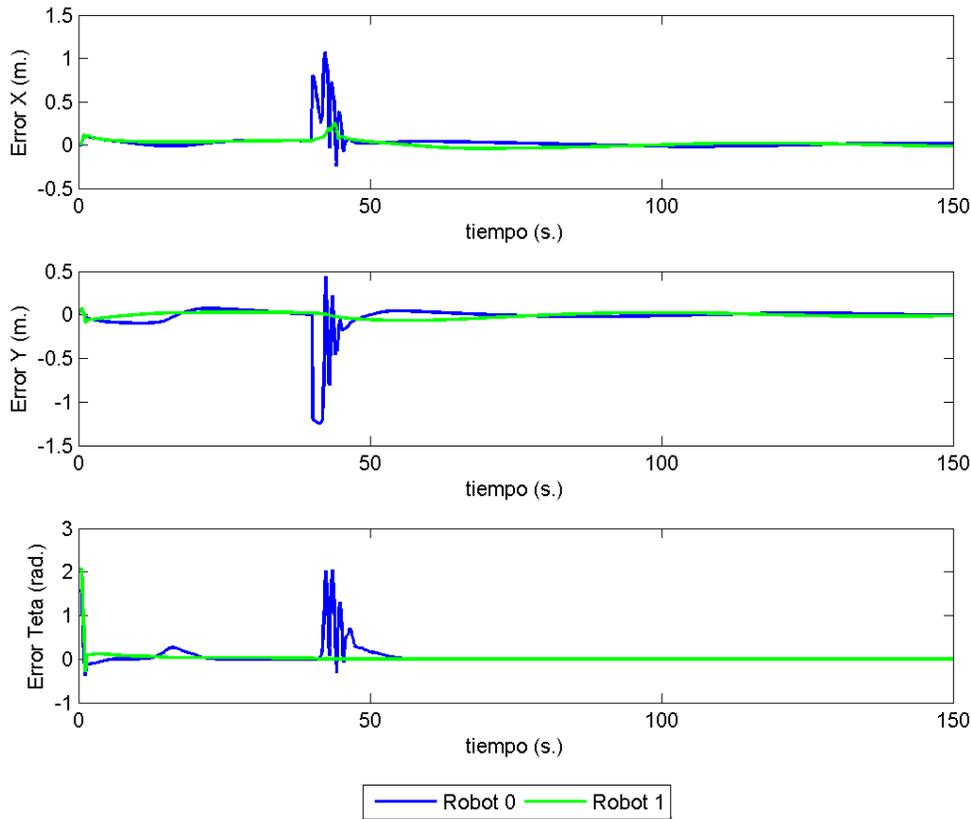


Figura 6.2: Errores de trayectoria

del robot 0 como respuesta ante la perturbación inducida a este robot. El sobre impulso de las ganancias decrece conforme el error correspondiente decrece. Las ganancias adaptables del robot 1 también presentan un sobre impulso, sin embargo en menor magnitud puesto que la perturbación experimentada por el robot 1 es menor.

Este fue el primer resultado obtenido en este trabajo de tesis y el cual motivó a continuar con la validación las ganancias adaptables de forma experimental, es decir en grupos de robots móviles reales sometidos a retardos de comunicación reales. Dichas validaciones experimentales son las que se presentan como experimento 1 y experimento 2 en las dos siguientes secciones.

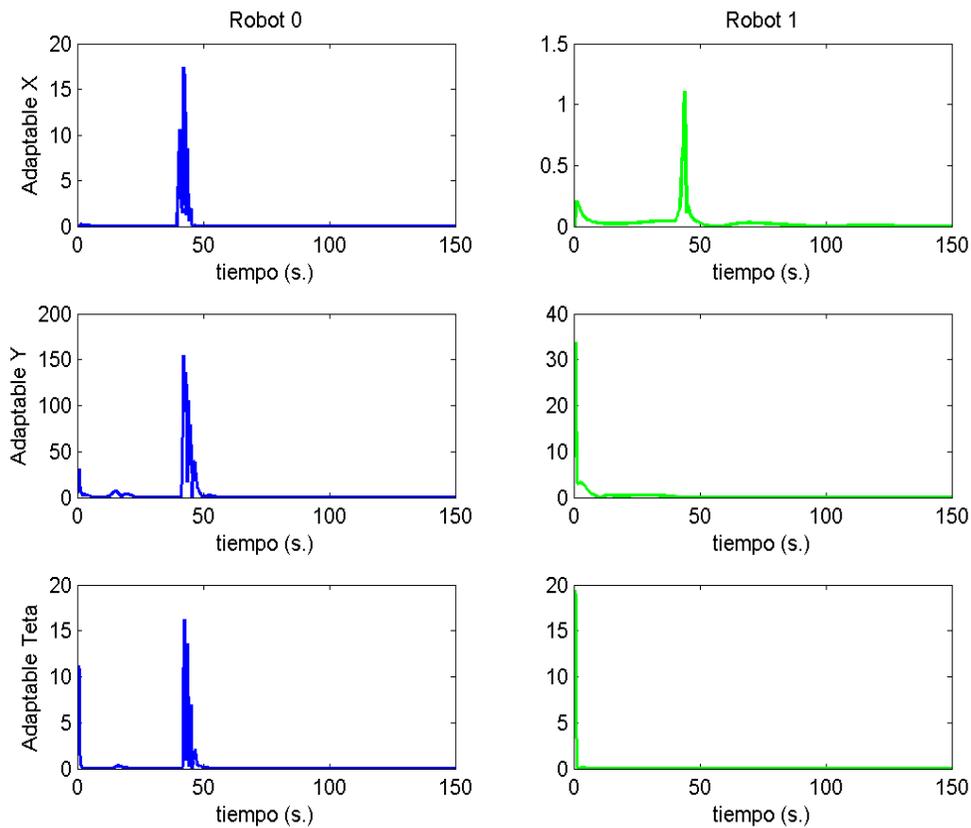


Figura 6.3: Ganancias adaptables

6.2 Experimento 1 (México Vs Holanda)

En esta sección se muestran dos pruebas siguiendo la estructura del experimento 1. La primera prueba consiste en la ejecución del experimento con ganancias constantes y la segunda prueba consiste en la ejecución del experimento con ganancias adaptables. Una descripción más detallada de este experimento se puede encontrar en la Sección 5.2. La Figura 6.4 muestra la estructura de la formación de los robots para este experimento. Se puede observar en este diagrama que se definieron dos grupos de robots, el grupo de robots de México conformado por 3 robots móviles de tipo iRobot, y el grupo de robots en Holanda conformado por 3 robots móviles virtuales de tipo Epucks. A ambos grupos de robots se les definió una trayectoria circular de referencia en sus respectivas plataformas experimentales. Como se puede apreciar, a

los robots de Holanda se les definió una trayectoria circular con menor radio que la trayectoria circular de los robots de México. Los robots tienen un desfase entre ellos de $\pi/6$ radianes. Cada grupo de robots debía de completar dos vueltas en 100 segundos de sus respectivas trayectorias de referencia circulares. Durante este experimento, la comunicación entre los grupos de robots se vió afectada por un retardo variable debido a la transmisión remota de datos. En cada prueba de este experimento se presenta una gráfica del retardo variable experimentado.

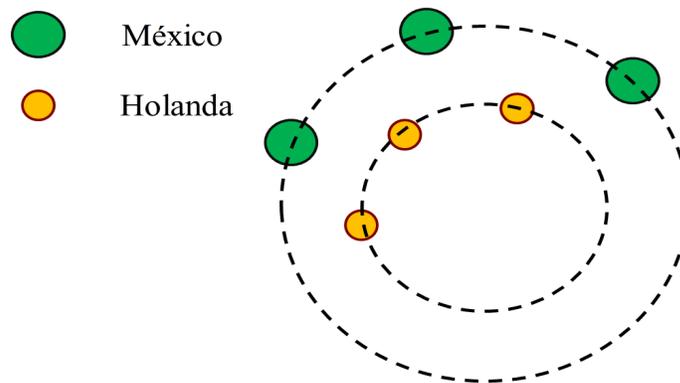


Figura 6.4: Esquema de formación de los robots

En la Tabla 6.2 se presenta el diámetro de los robots y el radio de la trayectoria de referencia para cada grupo de robots.

Tabla 6.2: Datos complementarios del experimento 1

	Robots en México	Robots en Holanda
Diámetro de los robots (m.)	0.26	0.07
Radio de trayectoria (m.)	0.5	0.3

En la Figura 6.5 se puede apreciar las plataformas usadas en este experimento. En la imagen con la etiqueta de color rojo se aprecia la plataforma experimental real de México con los tres robot *iRobot*. La imagen con la etiqueta amarilla representa la ventana donde se muestran los robots *Epuck* simulados desde Holanda. Finalmente la imagen con la etiqueta verde

muestra la imagen que se obtiene de la cámara en cielo del sistema de visión de la plataforma experimental en México. En esta misma imagen se observan pequeños círculos blancos, los cuales representan la posición de los robots en Holanda expresada en el marco de referencia de los robots de México.

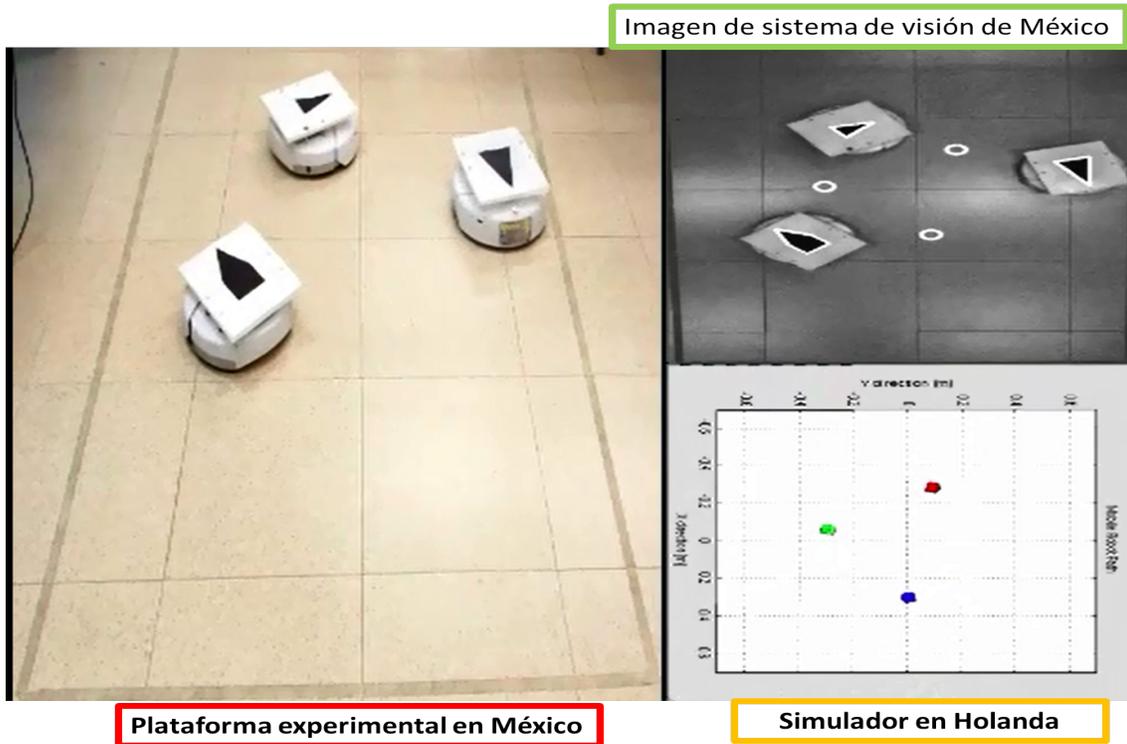


Figura 6.5: Plataformas experimentales de México y Holanda usadas en este experimento

6.2.1 Prueba 1: Ganancias constantes

Esta prueba consistió en ejecutar el experimento 1 considerando ganancias constantes en el control de ambos grupos de robots. Las ganancias constantes se muestran en la Tabla 6.3

Tabla 6.3: Ganancias constantes para ambos grupos de robots

Ganancias	Robots en México	Robots en Holanda
C_i^x	1.7	1
C_i^y	31	100
C_i^θ	3.5	0.5

En la Figura 6.6 se muestra el retardo experimentado a lo largo de esta prueba. Se puede observar que el retardo es variable e incluso se observan algunos sobre impulsos que alcanzan los 700 ms. El retardo promedio de esta gráfica es de 281 ms.

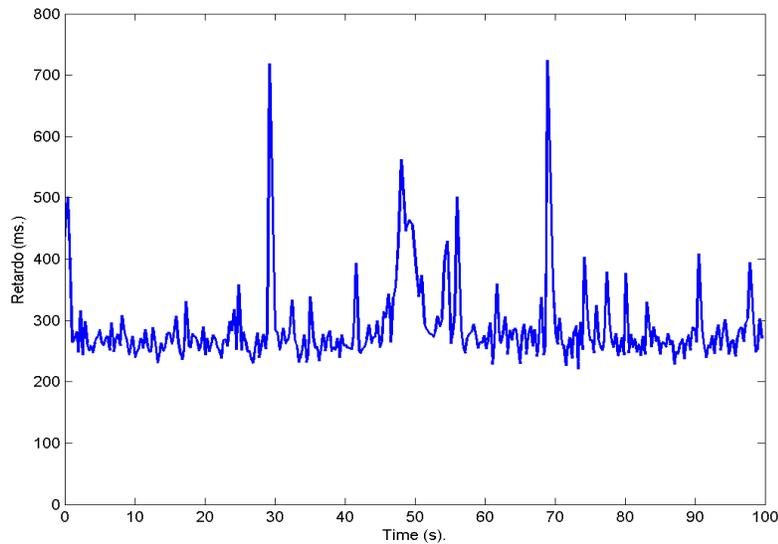


Figura 6.6: Retardo durante el experimento

En la Figura 6.7 se muestra la trayectoria real contra la trayectoria deseada. Los robots intentan seguir la trayectoria deseada (línea roja), pero debido al retardo en la transferencia de datos los robots presentan oscilaciones (línea azul) alrededor de la trayectoria deseada.

Este comportamiento se ve reflejado en las gráficas de los errores X, Y, θ (gráficas color azul) para el grupo de robots de México y Holanda mostrados en las Figuras 6.10, 6.11, respectivamente. Respecto a las gráficas de los robots en México, el error en posición y orientación es considerable. Las oscilaciones comentadas anteriormente se reflejan en estas gráficas y de forma más pronunciada en la gráfica del error en X se observan sobre impulsos que alcanzan los 20 cm.

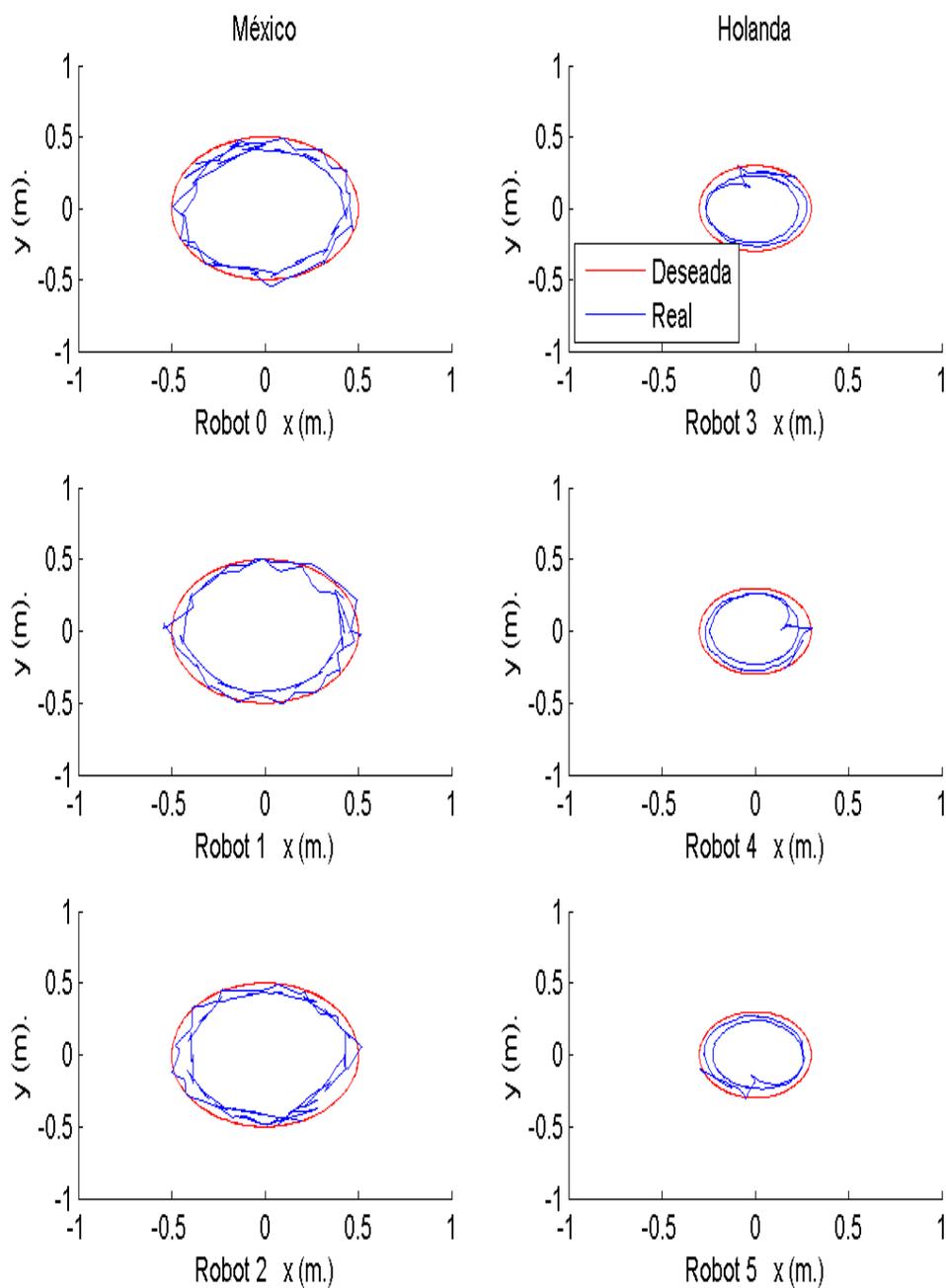


Figura 6.7: Trayectoria Real Vs Trayectoria deseada

El grupo de robots de Holanda también se ve afectado por el problema del retardo en la comunicación. A pesar de que el error en X, Y, θ de la Figura 6.11 (gráficas azules) son de menor magnitud respecto a los errores del grupo de robots de México, aún siguen siendo considerablemente grandes.

Por otra parte, la disminución de la magnitud del error tanto en posición como en orientación del grupo de robots de Holanda respecto al de México se debe a que la trayectoria circular de referencia para Holanda tiene un radio menor, por lo tanto la velocidad de este grupo de robots es menor, esto significa que el grupo de robots de Holanda trabaja bajo velocidades más lentas lo cual le da mayor oportunidad de responder ante el retardo en la comunicación.

6.2.2 Prueba 2: Ganancias adaptables

Esta prueba consistió en sustituir las ganancias constantes del control por las ganancias adaptables desarrolladas y presentadas en la Sección 3.5 tanto para el grupo de robots en México como para el grupo de robots en Holanda. La estructura de este experimento se encuentra detallada en la Sección 5.2. Los resultados de esta prueba se presentan a continuación. La Figura 6.8 muestra el retardo experimentado en esta prueba, donde se puede observar un retardo variable con algunos sobre impulsos importantes que alcanzan hasta los 1200 milisegundos aproximadamente.

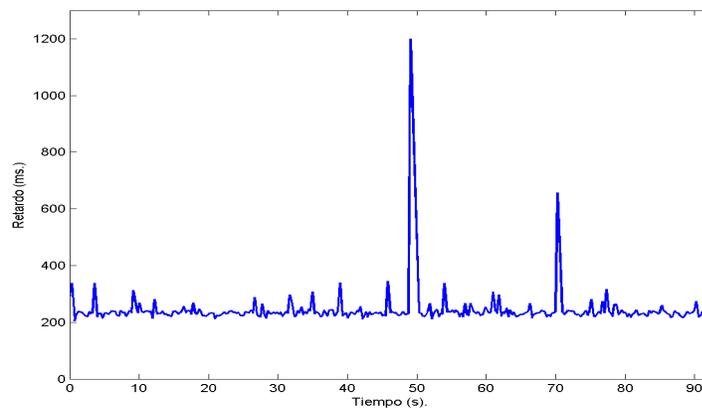


Figura 6.8: Retardo durante el experimento

En la Figura 6.9 se observa un comportamiento de los robots menos caótico, las oscilaciones presentadas alrededor de la trayectoria deseada con ganancias constantes (Figura 6.2.1) desaparecen completamente.

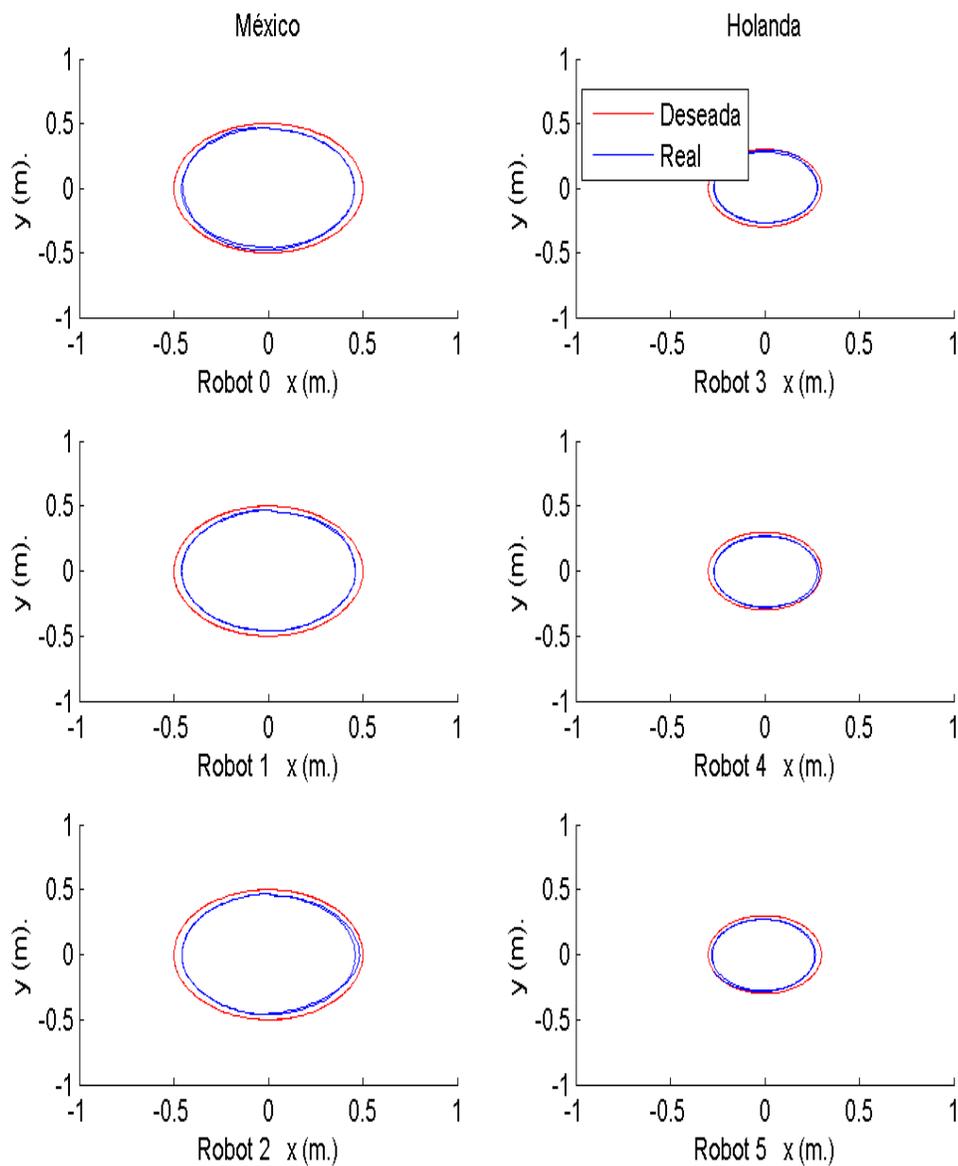


Figura 6.9: Trayectoria Real Vs Trayectoria deseada

En las gráficas de color azul de las Figuras 6.10 y 6.11 se observan los errores de trayectoria para el grupo de robots de México y Holanda, respectivamente. Se puede observar una notable disminución de la magnitud de los errores, las oscilaciones de las gráficas de color azul han desaparecido totalmente. Además, se observa una mejor definición de la convergencia a cero de cada uno de los errores de cada robot. En las Figuras 6.12 y 6.13 se muestran el comportamiento de las ganancias adaptables para el grupo de robots de México y el grupo de robots virtuales en Holanda, respectivamente. Como se puede ver, las ganancias se encuentran acotadas en todo momento.

En la gráfica del retardo de la Figura 6.8 puede apreciarse un sobre impulso máximo con una magnitud aproximada de 1200 milisegundos (1.2 s.) alrededor del segundo 50 de esta prueba. Este sobre impulso de retardo se ve reflejado de igual manera como un sobre impulso en la gráfica de los errores de esta prueba (gráficas color verde). Se aprecia de forma más pronunciada en el grupo de robots de Holanda, sobre todo en el error en X y en el error en θ . Sin embargo, las ganancias adaptables para este grupo responden de manera correcta como se observa en las gráficas de la Figura 6.13. En el comportamiento de estas ganancias se observa también un sobre impulso como respuesta al sobre impulso presentado en los errores de trayectoria.

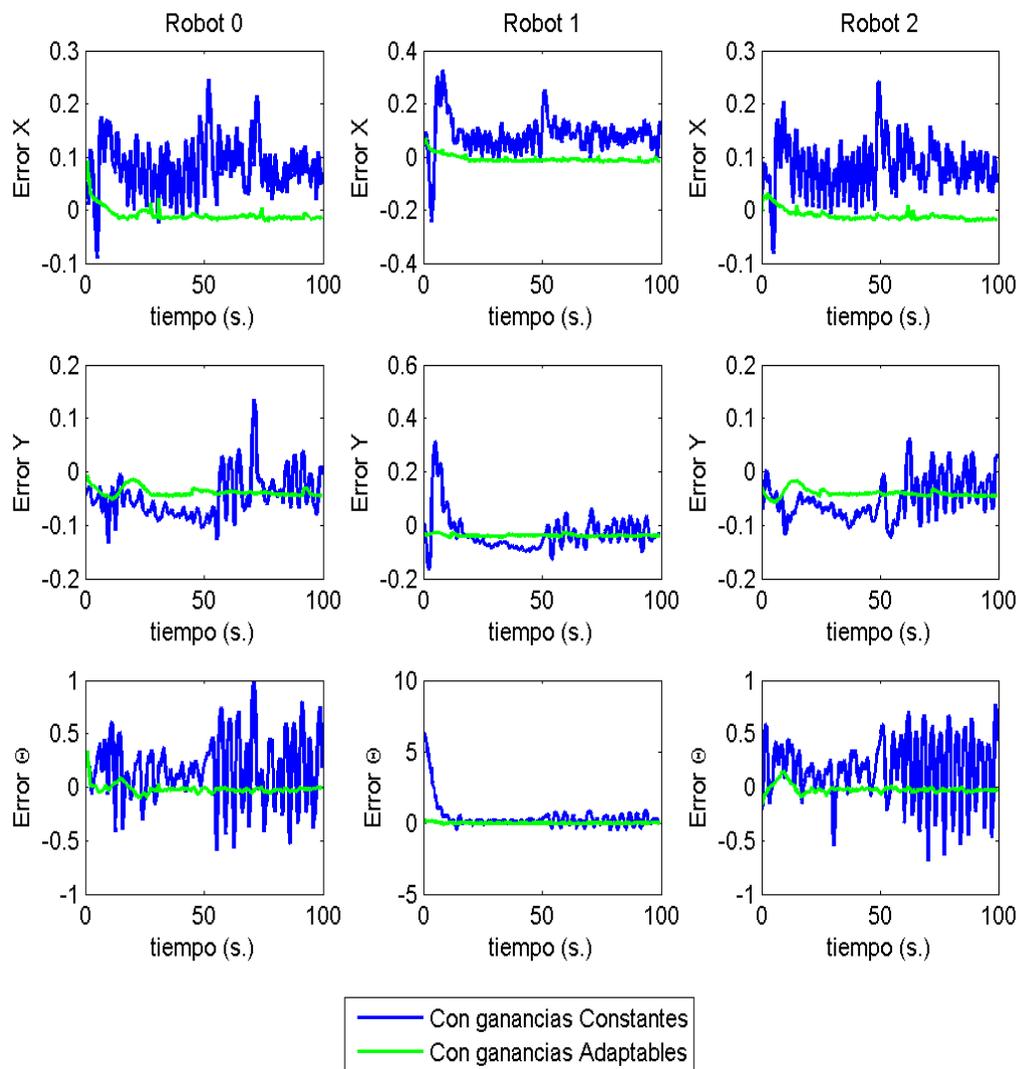


Figura 6.10: Comparación de errores de trayectoria para grupo de robots en México usando ganancias constantes y ganancias adaptables

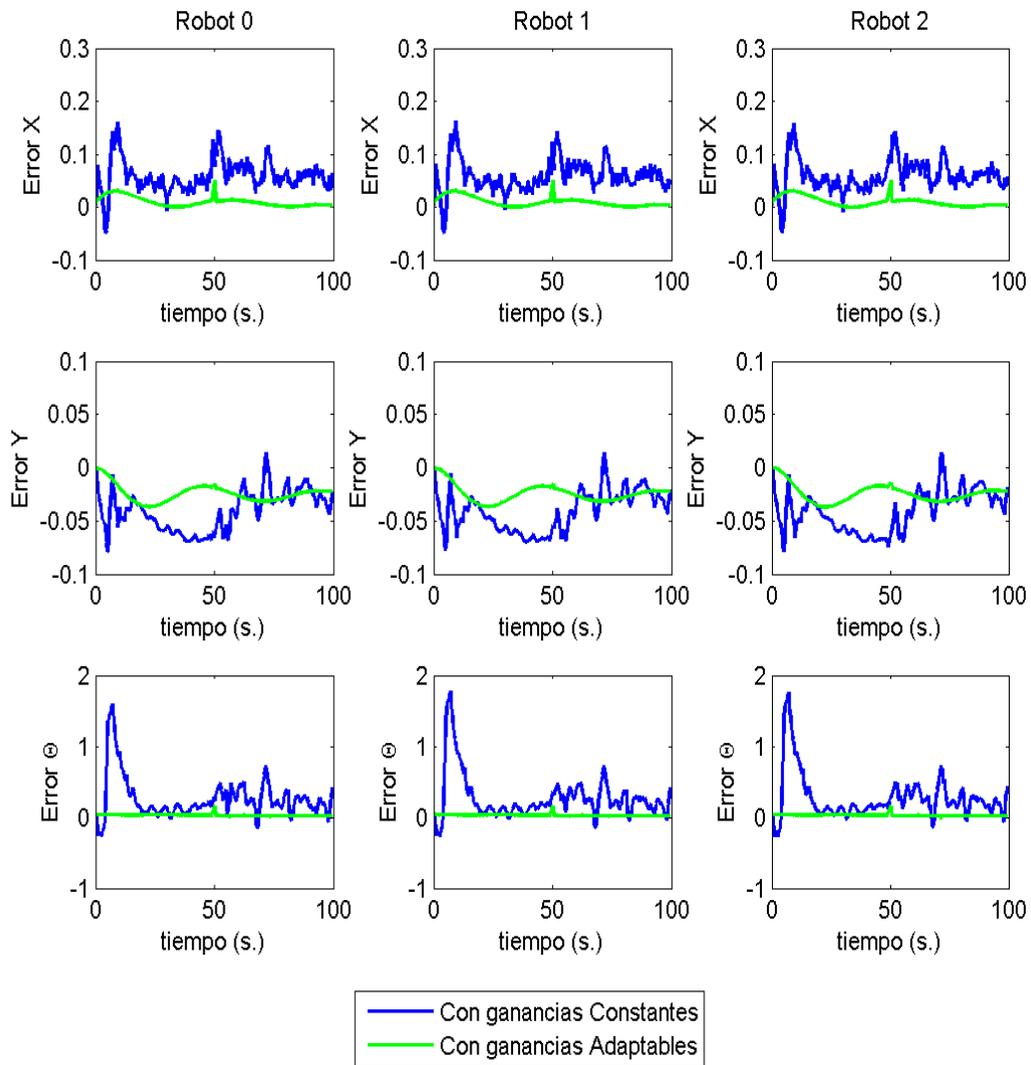


Figura 6.11: Comparación de errores de trayectoria para grupo de robots en Holanda usando ganancias constantes y ganancias adaptables

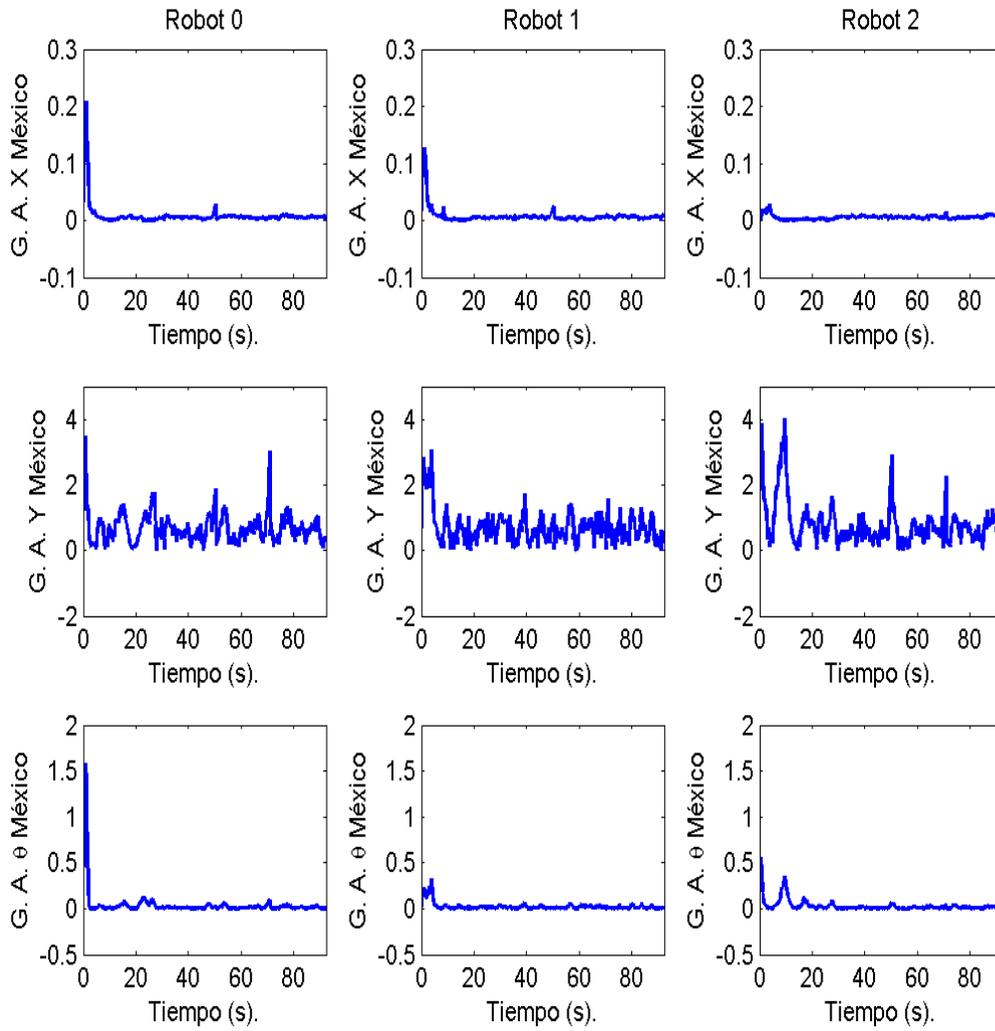


Figura 6.12: Ganancias Adaptables en X, Y, θ para grupo de robots en México

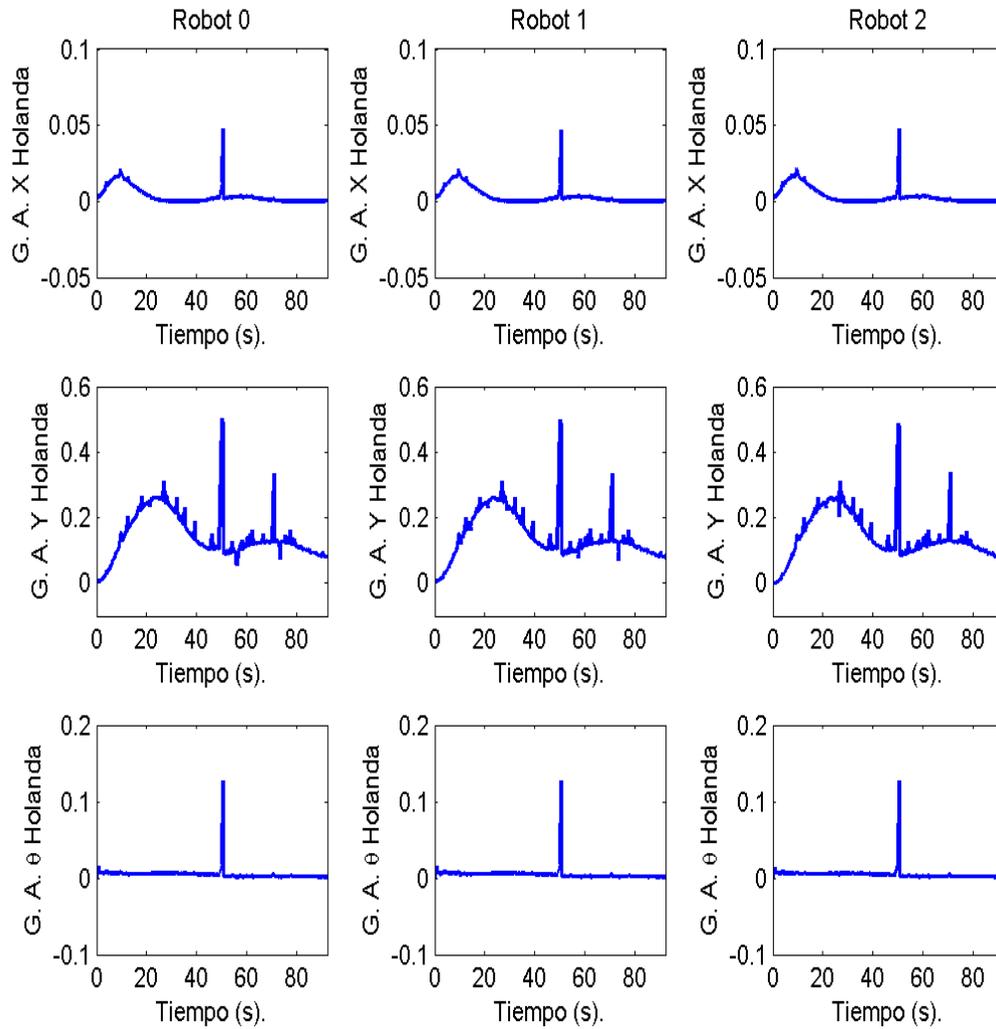


Figura 6.13: Ganancias Adaptables en X, Y, θ para grupo de robots en Holanda

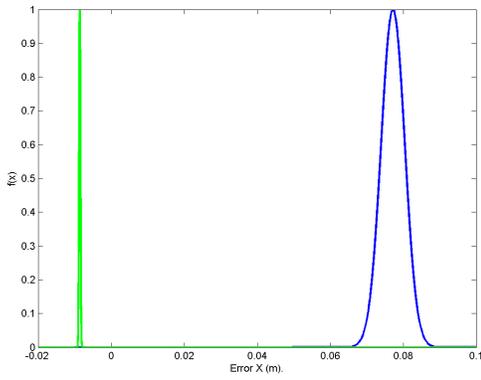
Para tener una visión más detallada sobre la mejora presentada entre usar ganancias constantes y ganancias adaptables se ha sacado una media y una varianza del error en X de los tres robots en México con la finalidad de construir una función de distribución normal (FDN), lo mismo se ha hecho con el resto de los errores Y, θ , obteniendo así tres funciones de distribución normal, una por cada error. Posteriormente, se han obtenido las mismas funciones de distribución normal para el grupo de robots de Holanda. Las gráficas correspondientes a estas funciones se presentan en las Figuras 6.14 y 6.15. Estas figuras se encuentran organizadas de la siguiente manera: a) muestra la función de distribución normal del error de trayectoria en X; b) muestra la función de distribución normal del error de trayectoria en Y; c) muestra la función de distribución normal del error de orientación θ .

Tabla 6.4: Parámetros para función de distribución normal para errores de robots en México

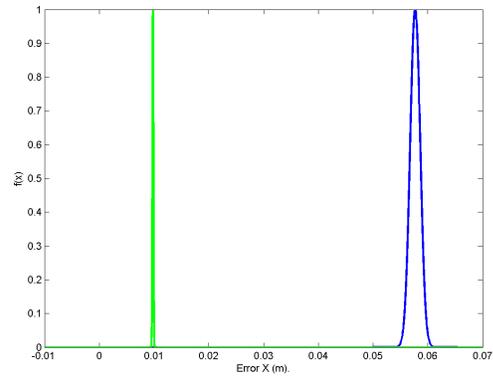
Robots en México				
Errores	Ganancias constantes		Ganancias Adaptables	
	Varianza	Media	Varianza	Media
X	0.0032	0.0772	1.6672e-4	-0.0086
Y	0.0028	-0.0434	4.5657e-5	-0.039
θ	9.0360e-4	0.0577	7.8828e-5	0.0098

Tabla 6.5: Parámetros para función de distribución normal para errores de robots en Holanda

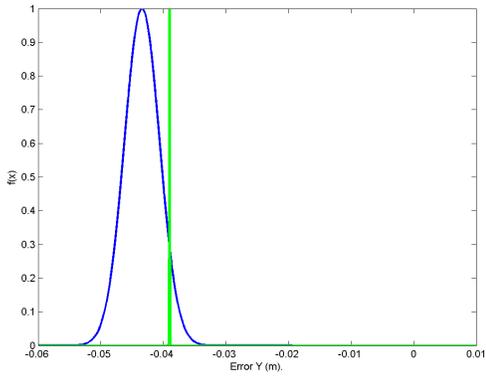
Robots en Holanda				
Errores	Ganancias constantes		Ganancias Adaptables	
	Varianza	Media	Varianza	Media
X	9.0360e-4	0.0577	7.8828e-5	0.0098
Y	3.5448e-004	-0.0409	6.9435e-5	-0.0247
θ	0.1027	0.2671	1.0109e-4	0.0267



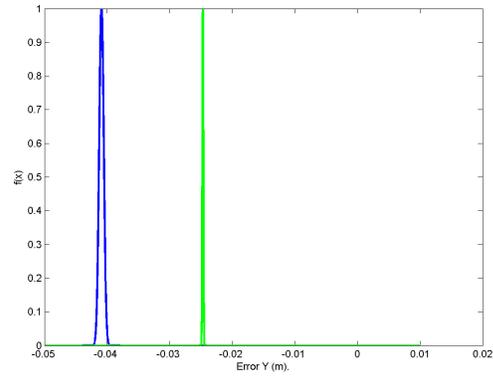
(a)



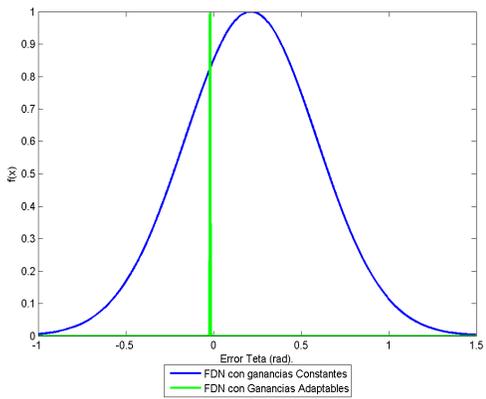
(a)



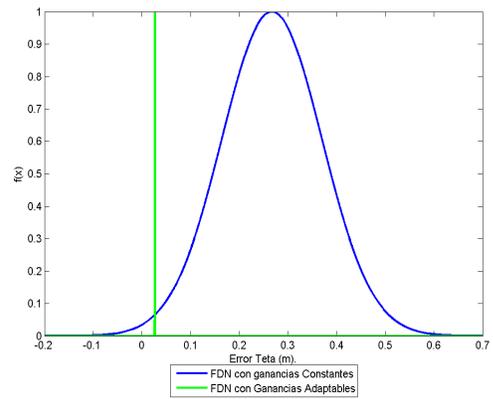
(b)



(b)



(c)



(c)

Figura 6.14: **FDN** para robots de México. Figura 6.15: **FDN** Para robots de Holanda

En la Figura 6.14, las funciones de distribución normal de color verde representan los resultados obtenidos usando ganancias adaptables, mientras que las funciones de distribución normal de color azul representan los resultados obtenidos al usar ganancias constantes. De acuerdo a estas gráficas y a las Tablas 6.4 y 6.5, se observa que las funciones de color azul tienen una media más alejada del cero respecto de las funciones de color verde. Esto quiere decir que el error en general es más grande usando ganancias constantes que ganancias adaptables. Esto concuerda con los errores presentados en las Figuras 6.10 y 6.11 donde se observa una disminución notable del error usando ganancias adaptables en vez de constantes. Otra diferencia importante es la varianza de las funciones. En las funciones de color verde la varianza es más grande que en las funciones de color azul. Esto indica una mayor dispersión de los datos con ganancias constantes que con ganancias adaptables. Esta dispersión de datos se relaciona directamente con las oscilaciones presentes en el seguimiento y errores de trayectoria, puesto que las oscilaciones implican una mayor variación de los datos alrededor de su media y esto a su vez se ve reflejado en la varianza. Por otro lado, al aplicar ganancias adaptables, las oscilaciones en los errores disminuyen notablemente por lo tanto no hay mucha variación de datos alrededor del error medio y esto a su vez se refleja en una varianza pequeña, es por ello que las funciones de distribución normal de color verde se ven más cerradas.

6.3 Experimento 2 (México Vs México)

Una descripción detallada de este experimento se encuentra en la Sección 5.4. Las pruebas consistieron en el seguimiento de dos trayectorias diferentes, circulares y Lissajous. En cada prueba de trayectoria se comparó el desempeño del grupo de robots usando ganancias constantes y adaptables. El grupo de robots está distribuido en dos plataformas experimentales dentro de CINVESTAV Unidad Saltillo, la primer plataforma experimental conformada por dos robots móviles diferenciales de tipo iRobot y la segunda plataforma experimental conformada por un robot móvil diferencial también de tipo iRobot. Estos robots cuentan con un diámetro de 0.26 m. Las pruebas de este experimento fueron sometidas a un retardo variable inducido en la transmisión de datos tomando como referencia el retardo natural experimentado en las pruebas del experimento 1 (Sección 5.2) donde dicho retardo natural se encontraba alrededor de los 300 milisegundos.

En la Figura 6.16 se aprecian las dos plataformas experimentales de México usando robots *iRobots* donde se ejecutaron las pruebas para el experimento 2, la plataforma experimental 1 conformada por dos robots y la plataforma experimental 2 conformada por un robot.

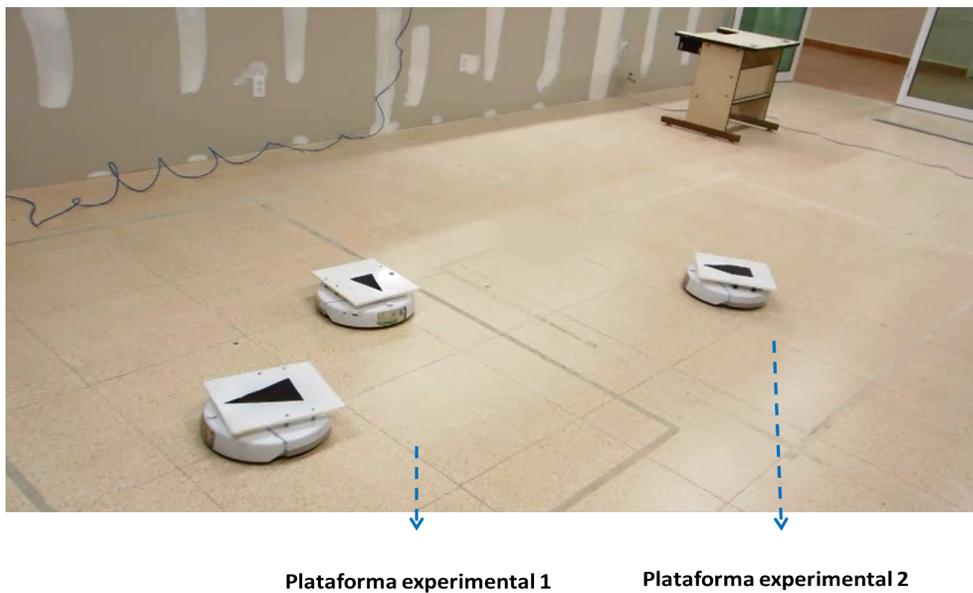


Figura 6.16: Plataformas experimentales de México usadas en experimento 2

6.3.1 Trayectoria circular

Las primeras pruebas para este experimento consistieron en una trayectoria circular sometida a retardo en la comunicación. La Figura 6.17 muestra la formación que el grupo de robots sincronizados debía de mantener durante estas pruebas. Los robots tienen un desfaseamiento entre ellos de $\pi/6$ radianes. Cada grupo de robots debía de completar tres vueltas en 188 segundos de sus respectivas trayectorias de referencia circulares. El radio de la trayectoria de referencia circular es de 0.5 metros.

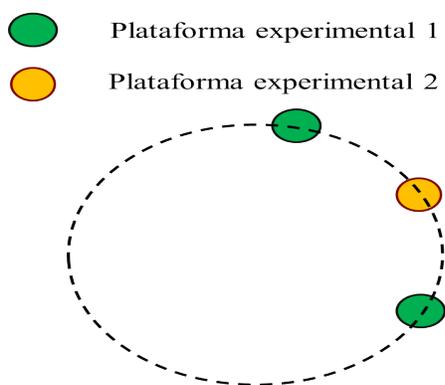


Figura 6.17: Estructura de la formación experimento 2

6.3.1.1 Prueba 1: Ganancias constantes

Esta prueba consistió en ejecutar el experimento 2 considerando ganancias constantes en el control de ambos grupos de robots. Las ganancias constantes son las mismas usadas para el experimento 1 y se muestran en la Tabla 6.3. Las gráficas resultantes de esta prueba 1 se muestran a continuación.

En la Figura 6.18 se presenta el retardo experimentado en la transmisión de datos entre las plataformas experimentales para esta prueba. En este caso, el retardo también es variable con un promedio de 324.6036 milisegundos. El comportamiento de los robots intentando seguir la trayectoria de referencia se muestra en las gráficas de la Figura 6.19. Se puede ver que la trayectoria real (línea azul) presenta nuevamente oscilaciones alrededor de la trayectoria deseada (línea roja). Este comportamiento indeseado se ve reflejado en las gráficas de color

azul de los errores de trayectoria de cada robot presentadas en la Figura 6.23 donde se observa también estas oscilaciones en el error de trayectoria en X , Y , θ tanto para los robots de la plataforma experimental 1 (robot 0, robot 2) y el robot de la plataforma experimental 2 (robot 1).

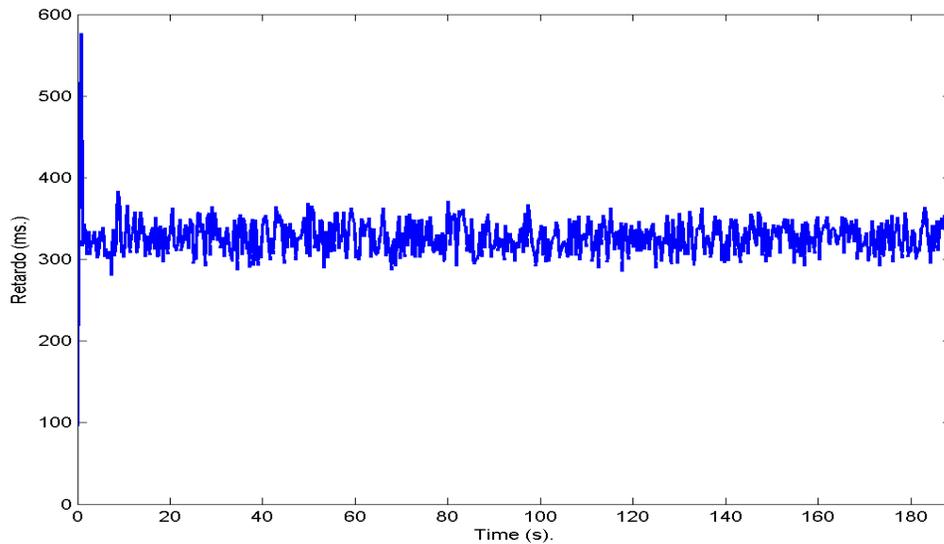


Figura 6.18: Retardo durante el experimento

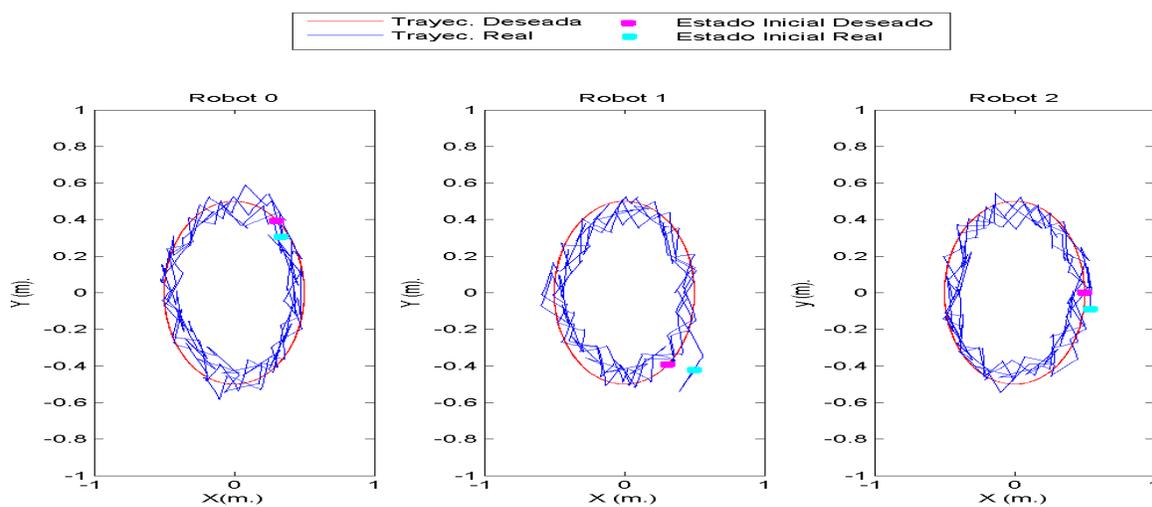


Figura 6.19: Trayectoria Real Vs Trayectoria deseada

6.3.1.2 Prueba 2: Ganancias adaptables

Para esta prueba se ha seguido la misma estructura del experimento 2 presentada en la Sección 5.4, usando ganancias adaptables implementadas en el control para ambas plataformas experimentales. A continuación se presentan los resultados de esta prueba.

En la Figura 6.20 se observa el retardo presente en esta prueba durante la ejecución. El retardo fue variable con un promedio de 323.4259 milisegundos.

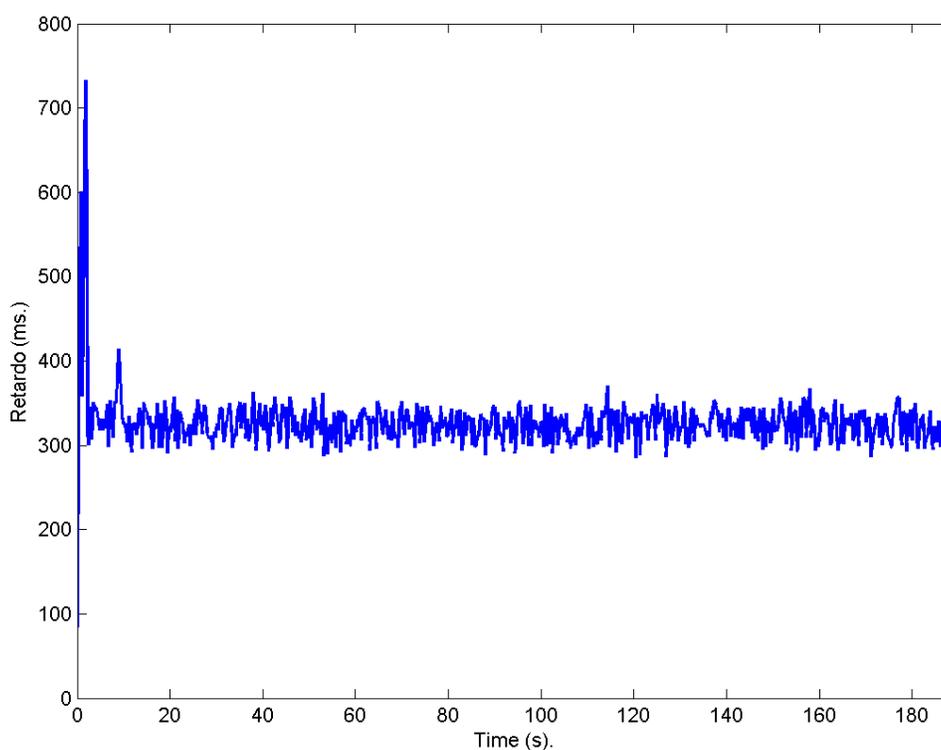


Figura 6.20: Retardo durante el experimento

En la Figura 6.21 se observa la trayectoria deseada y la trayectoria real de cada robot de ambas plataformas experimentales. Es importante resaltar que al iniciar esta prueba, las condiciones iniciales de los robot estuvieron distantes a las condiciones iniciales deseadas. En la Tabla 6.6 se muestran dichas condiciones iniciales de cada robot.

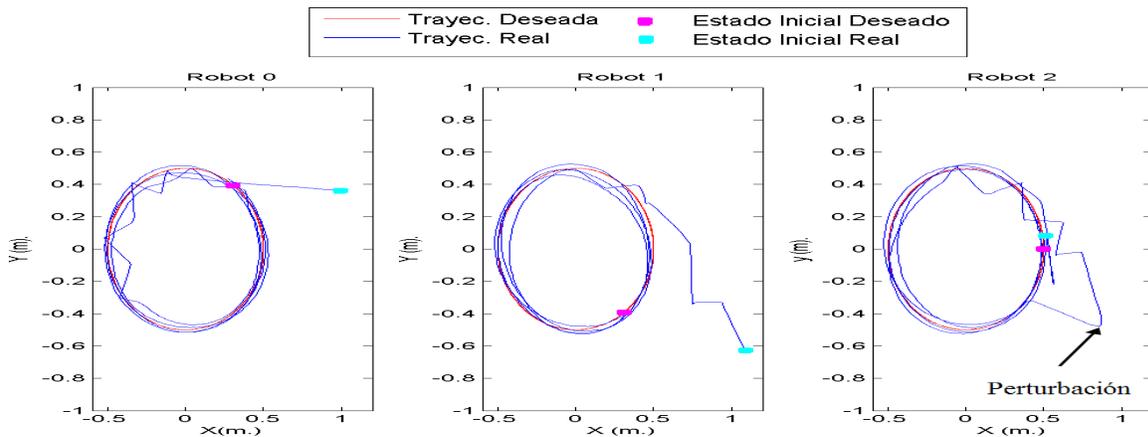


Figura 6.21: Trayectoria Real Vs Trayectoria deseada

Tabla 6.6: Condiciones iniciales reales y deseadas

	Condición inicial deseada		Condición inicial real	
	X_d	Y_d	X_r	Y_r
Robot 0	0.3108	0.3917	0.9959	0.3590
Robot 1	0.3108	-0.3917	1.0893	-0.6268
Robot 2	0.5000	0	0.5150	0.0825

A pesar de que las condiciones iniciales reales se encontraban distante de las condiciones iniciales deseadas, los robots eventualmente convergen a la trayectoria de referencia. Durante esta prueba, al robot 2 se le ha inducido una perturbación en el segundo 90 aproximadamente. En la gráfica de trayectorias de esta prueba se puede apreciar la perturbación experimentada por el robot. Posterior a esto, el robot experimenta un estado transitorio de oscilaciones como efecto del retardo. Sin embargo, la formación no se desestabiliza, las oscilaciones se desvanecen eventualmente y el robot converge a la trayectoria deseada.

La Figura 6.22 muestra el comportamiento de las ganancias adaptables para cada robot. Se observa que las gráficas comienzan con valores grandes, esto como respuesta a la distancia

entre la condición inicial deseada y la condición inicial real de cada robot. Adicionalmente, se observa un sobre impulso alrededor del segundo 90. Este sobre impulso también es una respuesta a la perturbación inducida al robot 2, es por eso que la magnitud de este sobre impulso es mayor en las gráficas del robot 2 que el resto de los robots. El aumento de las ganancias adaptables implica inyectar mayor velocidad ya sea lineal y/o angular al robot para que converja de forma asintótica a su trayectoria deseada después de experimentar un incremento en el error de trayectoria.

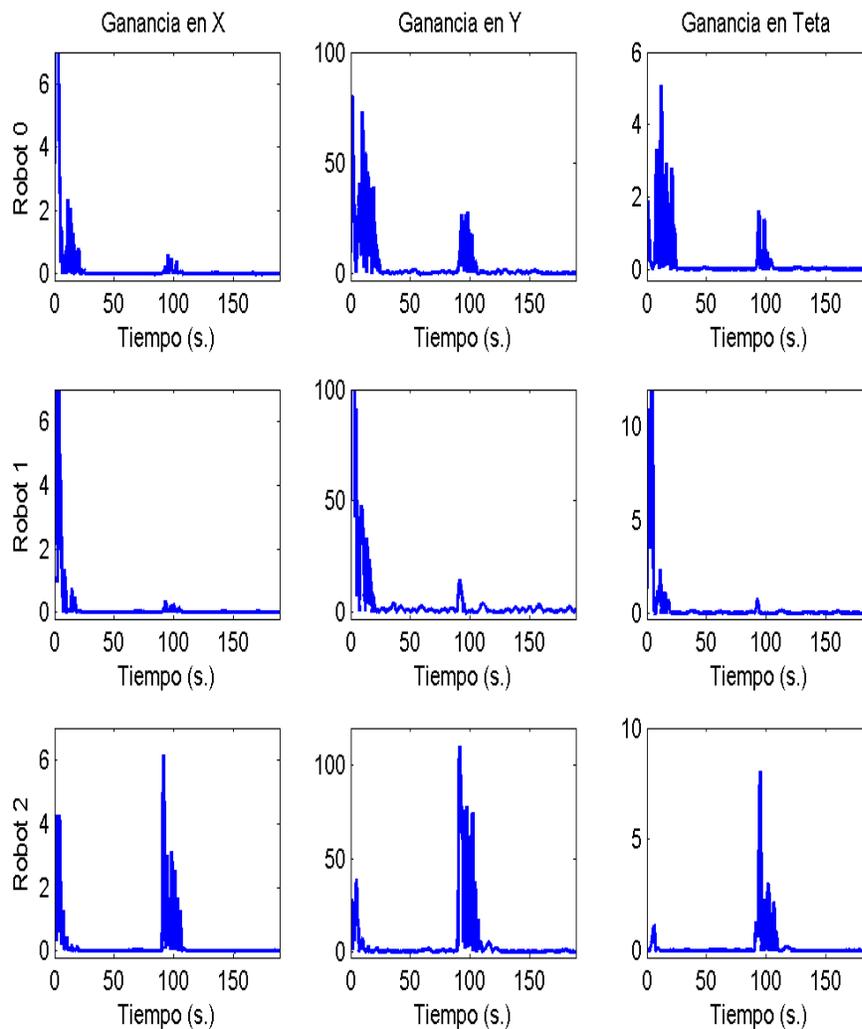


Figura 6.22: Ganancias adaptables de cada robot

6.3.1.3 Comparación de errores de trayectoria

Finalmente, en la Figura 6.23 se muestran los errores correspondientes a la prueba con ganancias constantes y con ganancias adaptables. En las gráficas usando ganancias constantes se observan oscilaciones de amplitud considerable y de alta frecuencia tanto en X , Y y θ en todos los robots. Esto refleja el comportamiento oscilante de los robots mostrado en la Figura 6.19. Por otra parte, la gráfica de color rojo representa los errores usando ganancias adaptables. Se puede apreciar una disminución considerable de las oscilaciones presentadas en las gráficas de color azul. El error en las gráficas de color rojo es grande al inicio debido a la distancia que existe entre la condición inicial real y la condición inicial deseada. Posterior a esto, se observa una transición oscilatoria pero eventualmente el error converge a cero. Alrededor del segundo 90 se observa un sobre impulso en las gráficas. Este sobre impulso es causado por la perturbación inducida. El sobre impulso más importante aparece en las gráficas de los errores del robot 2 ya que este robot es el que sufre la perturbación. Sin embargo, el resto de los robots también experimentan un sobre impulso en sus errores de menor magnitud. Esto se debe al acoplamiento existente entre los robots pues el resto de los robots intentan mantener la formación ante perturbaciones. Posterior a este sobre impulso en las gráficas los errores nuevamente convergen a cero.

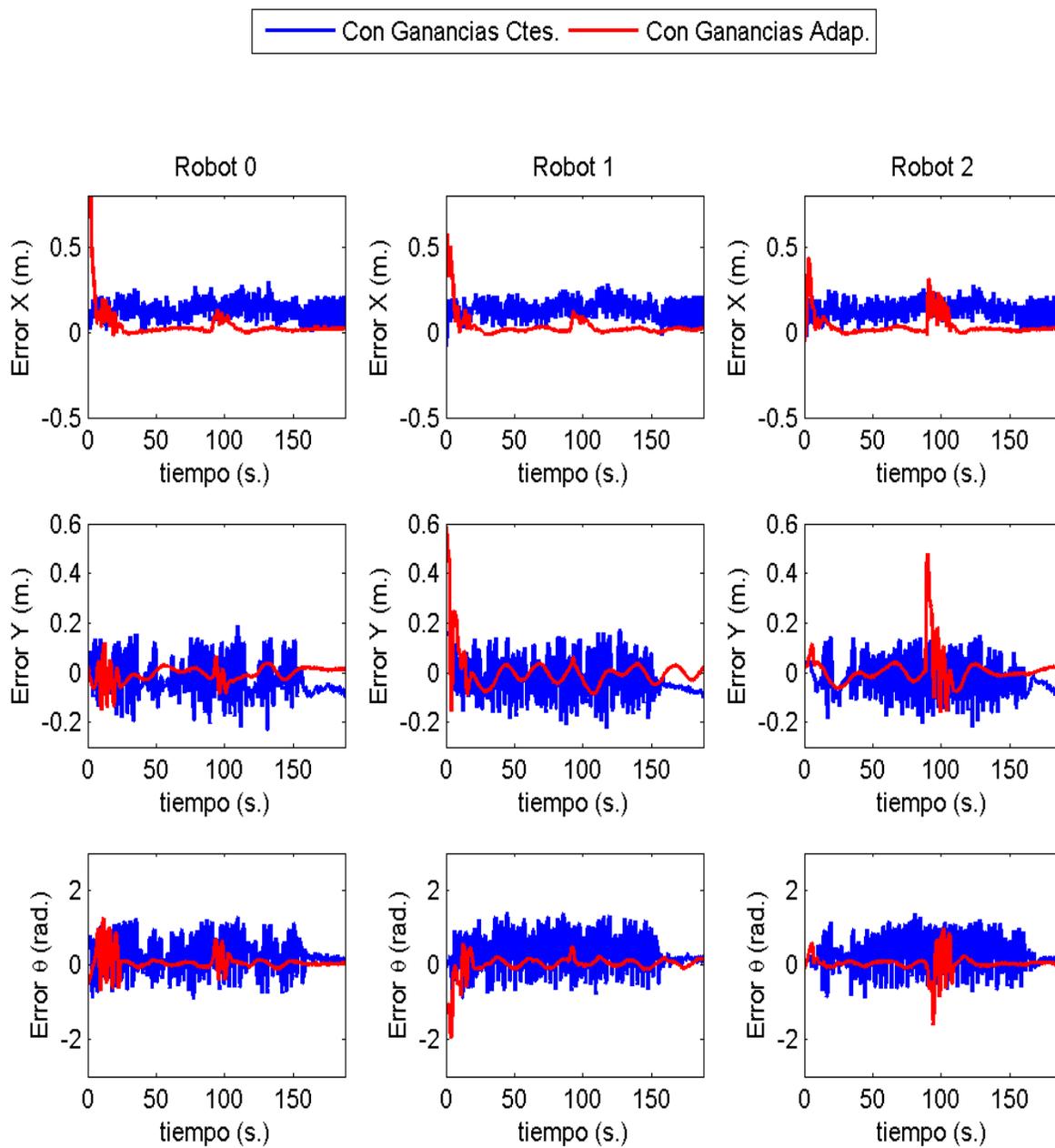


Figura 6.23: Errores de trayectoria de cada robot

6.3.2 Trayectoria Lissajous

En este caso se probó una trayectoria Lissajous horizontal con una formación que se muestra en la Figura 6.24. La prueba consistió en completar 3 vueltas en 280 segundos con un desfase entre los robots de $\pi/6$ radianes. Para objeto de comparación se realizaron dos pruebas con esta trayectoria, una considerando ganancias constantes y otra considerando ganancias adaptables.

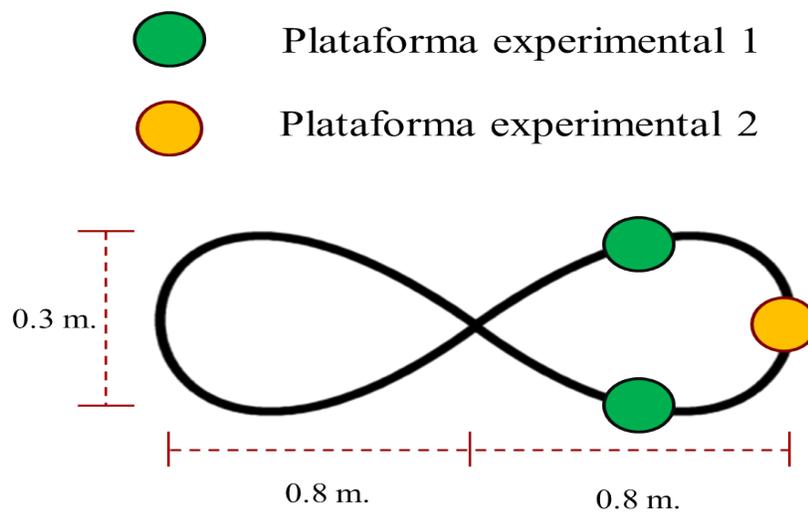


Figura 6.24: Estructura de la formación

6.3.2.1 Prueba 1: Ganancias constantes

Durante la prueba considerando ganancias constantes en el control se obtuvieron los siguientes resultados. La Figura 6.25 muestra el retardo que esta prueba experimentó en la comunicación, una vez más se observa un retardo variable con retardo promedio de 366.4863 milisegundos.

En la Figura 6.26 se observa la trayectoria Lissajous deseada y la trayectoria real de cada robot. Como era de esperarse, la trayectoria real nuevamente presenta oscilaciones alrededor de la trayectoria deseada como efecto negativo del retardo.

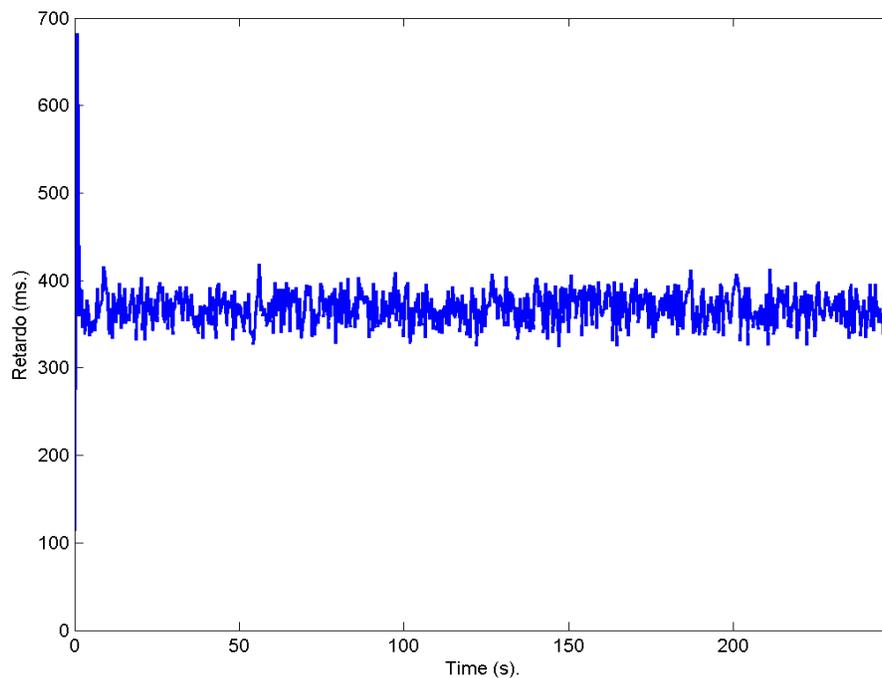


Figura 6.25: Retardo durante el experimento

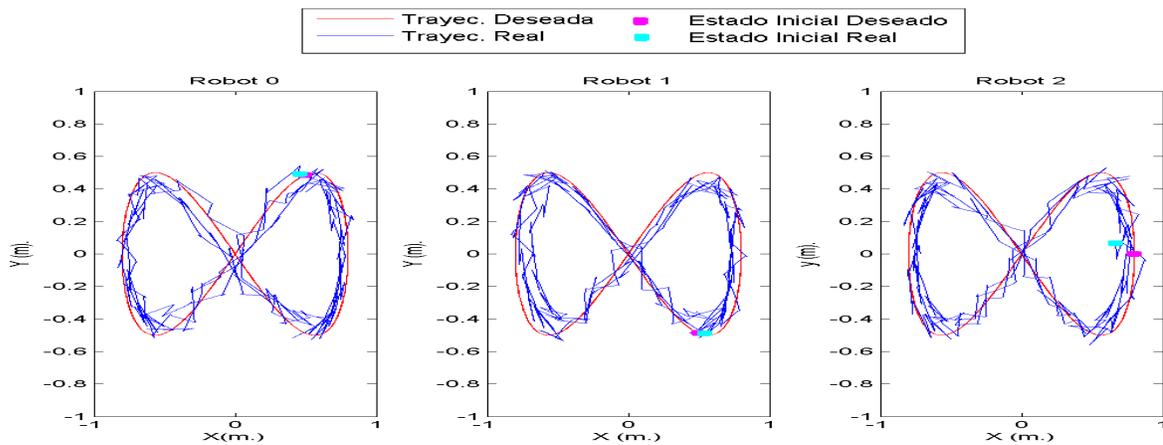


Figura 6.26: Trayectoria deseada Vs Trayectoria real con el uso de ganancias constantes

6.3.2.2 Prueba 2: Ganancias adaptables

En la Figura 6.27 se puede apreciar el retardo variable experimentado en esta prueba. El promedio de este retardo es de 404.6609 milisegundos, es decir 38.1746 milisegundos más que la prueba mostrada anteriormente con ganancias constantes.

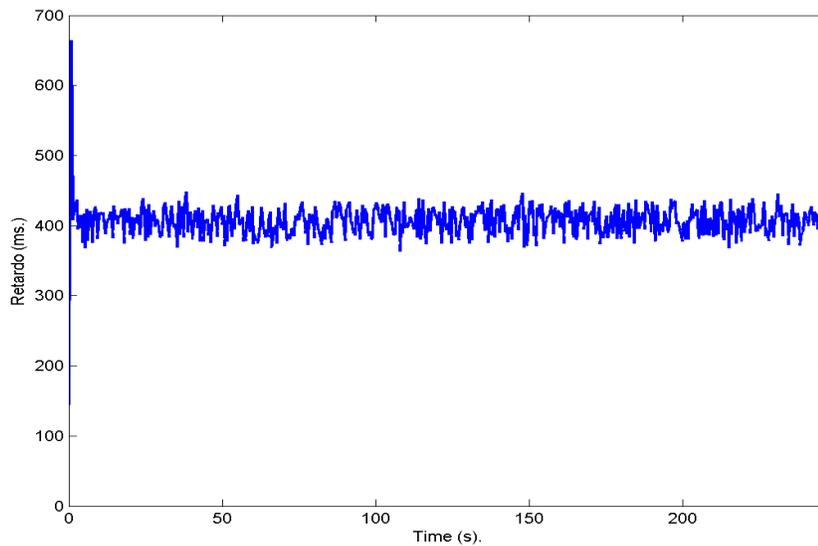


Figura 6.27: Retardo durante el experimento

La Figura 6.28 muestra el comportamiento de los robots en esta prueba. Se puede observar una disminución notable de las oscilaciones presentadas respecto al uso de ganancias constantes. La trayectoria real se encuentra más cercana a la trayectoria deseada en cada robot.

La Figura 6.29 muestra el comportamiento de las ganancias adaptables para lograr la similitud entre la trayectoria deseada y la trayectoria real mostrada en la Figura 6.28. Se observa que las ganancias se encuentran acotadas en todo momento.

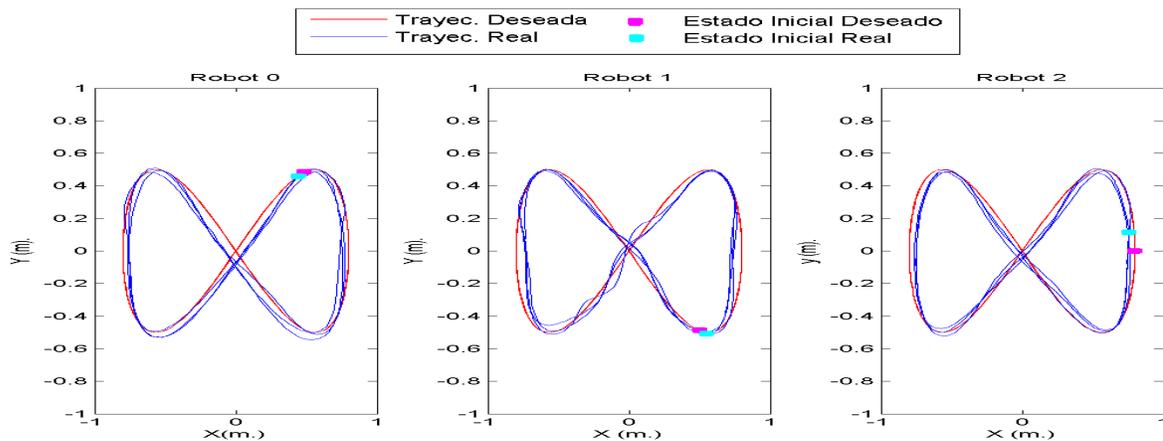


Figura 6.28: Trayectoria deseada Vs trayectoria real con el uso de ganancias adaptables

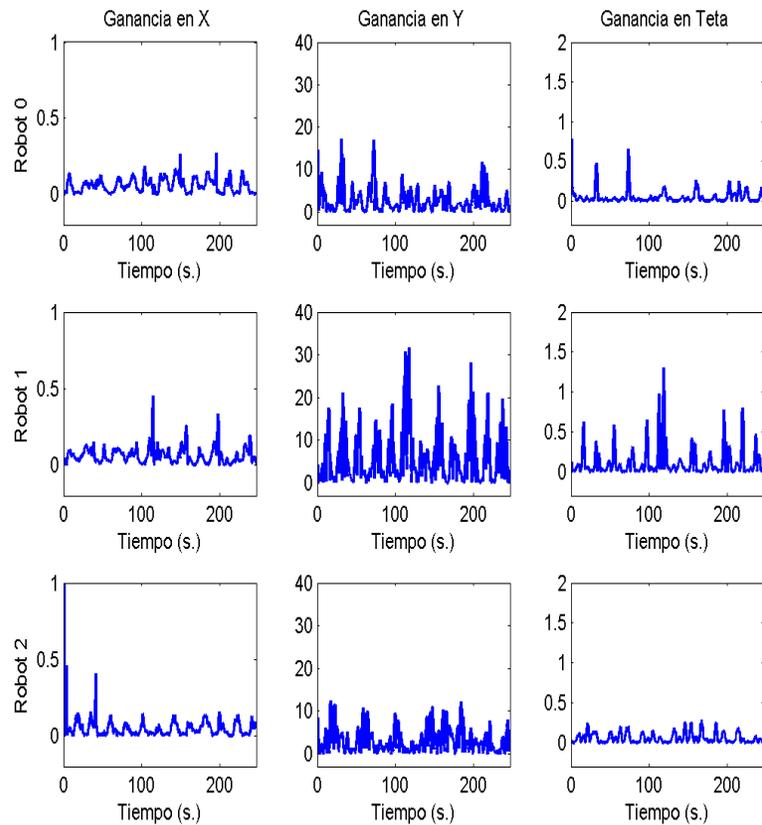


Figura 6.29: Comportamiento de las ganancias adaptables

6.3.2.3 Comparación de errores de trayectoria

En la Figura 6.30 se observan los errores de trayectoria para cada uno de los robots en este experimento, tanto para de la prueba con ganancias constantes (gráficas color azul) como de la prueba con ganancias adaptables (gráficas color rojo). Las gráficas color azul revelan un comportamiento oscilatorio en los errores debido al retardo. Sin embargo, al implementar las ganancias adaptables se observa que estas oscilaciones se atenúan considerablemente haciendo converger los errores a cero. Esta atenuación se observa de manera más pronunciada en el error en X para los tres robots. En las gráficas de color rojo del error en Y aún se observan incrementos del error acompañados de algunas oscilaciones. Sin embargo, la mejoría se aprecia en la reducción de la frecuencia de estas oscilaciones.

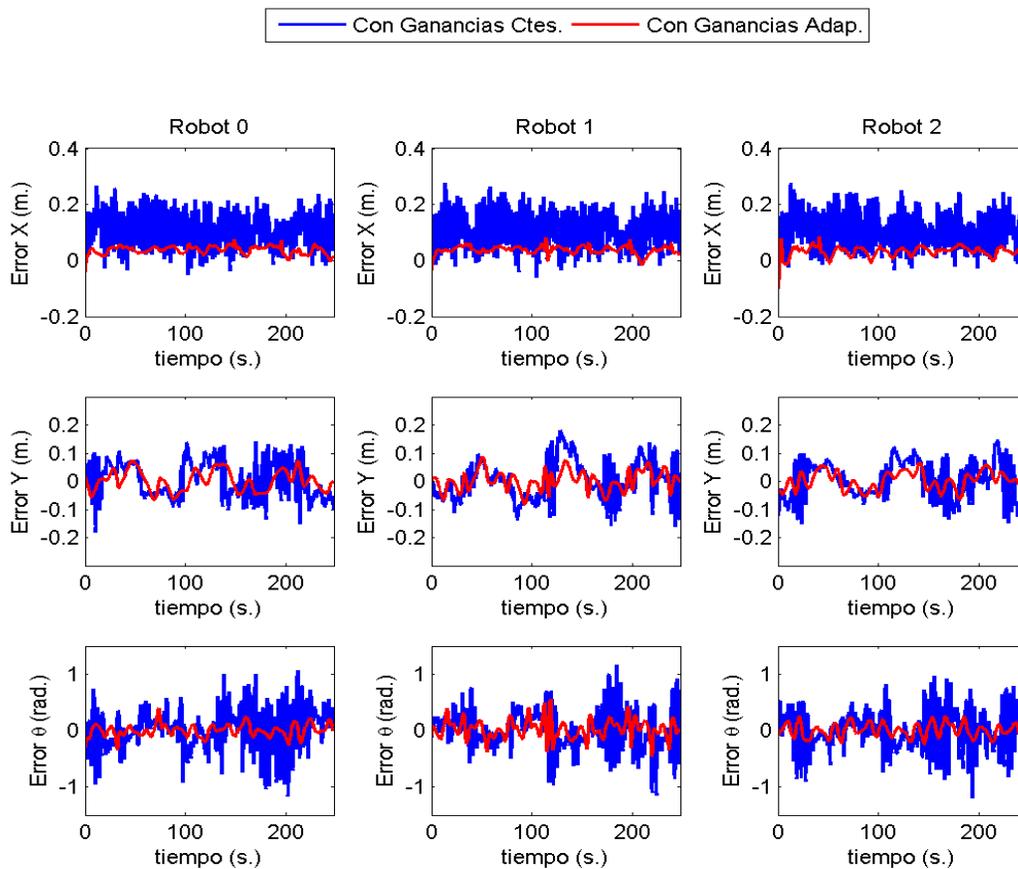


Figura 6.30: Errores de trayectoria

Una comparación más clara de la magnitud de los errores en ambas pruebas se puede apreciar en la Figura 6.31 donde se presentan diferentes funciones de distribución normal construidas a partir de la media y la varianza de la suma de los errores en X , Y , θ de cada robot. Las gráficas de color verde fueron generadas a partir de los errores obtenidos de la prueba con ganancias constantes, mientras que las funciones de color rojo fueron generadas a partir de los errores obtenidos en la prueba con ganancias adaptables. De esta manera, la media de cada **FDN** representa el error promedio de los tres robots ya sea en X en Y o en θ , por lo tanto, a menor error las **FDN** se encuentran centradas más cercanas a 0, mientras que a mayor error las **FDN** se encuentran centradas a mayor distancia del 0. Por otra parte, la varianza de las **FDN** está directamente relacionada con las oscilaciones presentadas en los errores de modo que, mayor oscilaciones en los errores implica una mayor apertura en el ancho de las **FDN** y a menor oscilaciones implica que las **FDN** se encuentre más cerradas. En la Figura 6.31 se aprecia que las gráficas de color rojo, correspondientes al uso de ganancias adaptables, se encuentran centradas más cerca del 0 respecto de las gráficas de color verde, correspondientes al uso de ganancias constantes. Además, se aprecia claramente que las gráficas de color rojo son más cerradas que las gráficas de color verde. Esto revela que el empleo de ganancias adaptables reduce el error de trayectoria y disminuye a su vez las oscilaciones presentadas en el uso de ganancias constantes.

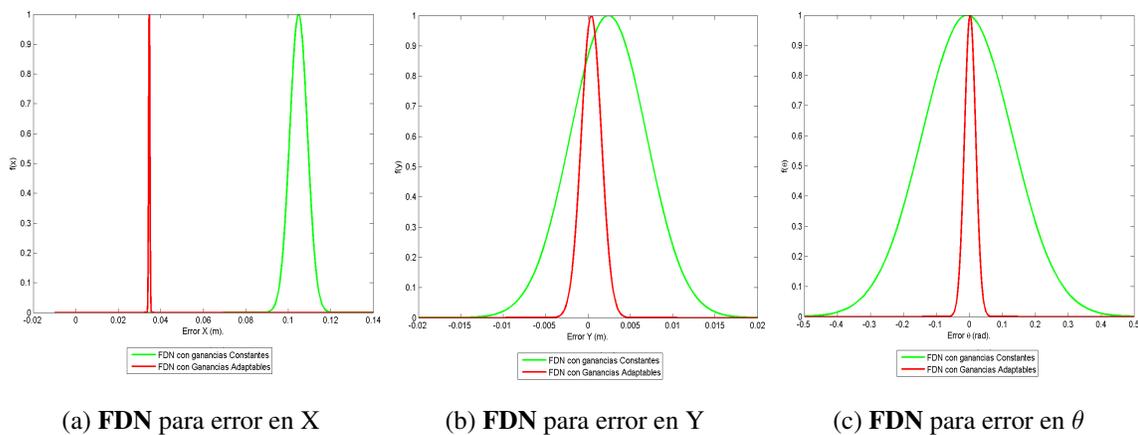


Figura 6.31: Funciones de Distribución Normal con ganancias constantes y con ganancias adaptables

6.4 Conclusiones y trabajo futuro

6.4.1 Conclusiones

Este trabajo de tesis se ha enfocado en analizar y atenuar los problemas relacionados al retardo en los sistemas de comunicación presentados en la sincronización de grupos de robots. Se ha encontrado que un retardo mayor a 100 milisegundos tiene efectos negativos en las tareas que desempeña el grupo de robots móviles y conforme este retardo incrementa, los efectos negativos son más notorios llegando incluso a inestabilizar la sincronización. Mediante experimentos realizados en la sincronización de dos grupos de robots a distancia intentado seguir una trayectoria de referencia previamente establecida se ha demostrado que estos efectos negativos se reflejan como oscilaciones alrededor de dicha trayectoria deseada de cada robot. Se encontró que la amplitud de estas oscilaciones son proporcionales a la magnitud del retardo presentado en la transferencia de información entre los grupos de robots. Así mismo, se ha demostrado que es posible desvanecer estas oscilaciones desfavorables sustituyendo las ganancias constantes del control por ganancias adaptables diseñadas a partir de funcionales que dependen del estado retardado.

La implementación de estas ganancias demostró una notable mejoría en la problemática generada por el retardo, dichas ganancias lograron proporcionar a los robots un comportamiento sutil si el robot se acerca a la referencia, considerando de alguna forma la incertidumbre del retardo y por otra parte, un comportamiento más acelerado si los robots se encuentran lejos de la referencia. De esta manera se lograron desvanecer las oscilaciones presentadas alrededor de la trayectoria deseada de los robots. Esta solución demostró ser efectiva en las siguientes situaciones:

- Aun cuando existe retardo variable en el sistema de comunicación.
- Aun cuando las condiciones iniciales reales de los robots se encuentran distantes de las condiciones iniciales deseadas.
- Aun cuando alguno de los elementos de la formación sufre alguna perturbación externa.

En los tres casos las ganancias adaptables respondieron adecuadamente logrando que los errores de trayectoria convergieran a cero. Sin embargo, el resultado más importante de este trabajo de tesis radica en el hecho de que la solución propuesta funciona aun cuando el retardo experimentado en la transferencia de datos no es constante. La sincronización y el desempeño de los robots respondieron de manera satisfactoria a pesar de existir algunos sobre impulsos considerables en la magnitud del retardo. Este resultado es relevante, pues en la literatura actual, el alcance de las soluciones propuestas se limita a retardos constantes. Se encontró de forma experimental que estos resultados lograron ser efectivos con un retardo máximo promedio de hasta 600 milisegundos. Finalmente, se mostró la prueba de estabilidad mediante una función de Lyapunov-Razumikhin que demuestra matemáticamente la limitación del uso de ganancias constantes ante la presencia del retardo en el sistema.

Por último, la plataforma experimental construida en Cinvestav Unidad Saltillo capaz de proporcionar posición y orientación de robots móviles mediante un sistema de visión, ha servido como apoyo en otros proyectos de la misma línea de investigación.

6.4.2 Trabajo futuro

A pesar de atacar diversos aspectos en este tema de tesis aún existe trabajo pendiente al cual puede darse seguimiento. Dentro del trabajo futuro a considerar se encuentran los siguientes aspectos: introducción

- Implementar nuevos algoritmos de localización basados en visión estéreo o ecolocalización para eliminar la limitación del campo de trabajo que implica trabajar con cámaras aéreas fijas.
- Llevar a cabo el experimento 1 presentado en la Sección 6.2.1 donde el grupo de robots virtuales de Holanda pueda sustituirse por un grupo de robots reales.

- Desarrollar la prueba de estabilidad considerando la sustitución de las ganancias adaptables k_x, k_y, k_θ y demostrar matemáticamente el rango permisible de este enfoque.
- Desarrollar nuevos algoritmos basados en desigualdades de matrices lineales (LMI, por sus siglas en inglés), con la finalidad de aumentar el retardo permitido en la sincronización manteniendo las ventajas ofrecidas por las ganancias adaptables propuestas en este trabajo de tesis.
- Realizar sincronización de grupos de robots no homogéneos sometidos a retardo. Por ejemplo, grupo de robots móviles con grupo de robots humanoides.

Apéndice

Función de Lyapunov

A.1 Desarrollo de la función de Lyapunov

Posterior al cambio de variable del vector X presentado en el vector (3.23), el desarrollo de la función de Lyapunov a partir de la ecuación (3.25) continúa de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 V(x_e, y_e) &= z_1 \left(\sum_{i=1}^{2n} z_i P_{i1} \right) + z_2 \left(\sum_{i=1}^{2n} z_i P_{i2} \right) + \cdots + z_{2n} \left(\sum_{i=1}^{2n} z_i P_{i2n} \right) \\
 V(x_e, y_e) &= P_{11} z_1^2 + z_1 \left(\sum_{i=1, i \neq 1}^{2n} z_i P_{i1} \right) + P_{22} z_2^2 + z_2 \left(\sum_{i=1, i \neq 2}^{2n} z_i P_{i2} \right) + \cdots + P_{(2n)(2n)} z_{2n}^2 \\
 &\quad + z_{2n} \left(\sum_{i=1, i \neq 2n}^{2n} z_i P_{i(2n)} \right) \\
 V(x_e, y_e) &= \sum_{i=1}^{2n} P_{ii} z_i^2 + \sum_{i=1}^{2n} \sum_{i=1, j \neq i}^{2n} z_i z_j P_{ij}
 \end{aligned}$$

Considerando la simetría de la matriz P (ecuación (3.24)) podemos decir que $z_i z_j P_{ij} = z_j z_i P_{ji}$ por lo tanto la función V se reduce a

$$V(x_e, y_e) = \sum_{i=1}^{2n} P_{ii} z_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{2n} \sum_{i=1, j=i+1}^{2n} z_i z_j P_{ij}$$

A.2 Derivada de la función de Lyapunov

Considerando al vector de estado φ_1 definido como $\varphi_1 = \begin{bmatrix} x_e & y_e \end{bmatrix}$ en donde θ se encuentra desacoplado, entonces la derivada de la función candidata de Lyapunov V , de acuerdo a

[Sadowska *et al.* (2011)] se puede obtener mediante.

$$\dot{V}(t, \varphi_1) = \frac{\partial V(t, \varphi_1(0))}{\partial t} + \frac{\partial V(t, \varphi_1(0))}{\partial x} \cdot f(t, \varphi_1) \quad (\text{A.1})$$

donde

$$\frac{\partial V(t, \varphi_1)}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial V(t, \varphi_1)}{\partial x} = \frac{\partial V(t, \varphi_1)}{\partial z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V(t, \varphi_1)}{\partial z_1} \\ \frac{\partial V(t, \varphi_1)}{\partial z_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial V(t, \varphi_1)}{\partial z_n} \end{bmatrix}$$

Desarrollando la derivada parcial de la función de Lyapunov

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(t, \varphi_1)}{\partial z_1} &= 2z_1 P_{11} + 2 \sum_{i=2}^{2n} z_i P_{1i} = 2 \sum_{i=1}^{2n} z_i P_{1i} \\ \frac{\partial V(t, \varphi_1)}{\partial z_2} &= 2z_2 P_{22} + 2 \sum_{i=3}^{2n} z_i P_{2i} + \frac{\partial}{\partial z_2} [2z_1 z_2 P_{12}] = 2 \sum_{i=1}^{2n} z_i P_{2i} \\ \frac{\partial V(t, \varphi_1)}{\partial z_3} &= 2z_3 P_{33} + 2 \sum_{i=4}^{2n} z_i P_{3i} + \frac{\partial}{\partial z_3} [2z_1 z_3 P_{13} + 2z_2 z_3 P_{23}] = 2 \sum_{i=1}^{2n} z_i P_{3i} \\ &\vdots \\ \frac{\partial V(t, \varphi_1)}{\partial z_{2n}} &= 2z_{2n} P_{(2n)(2n)} + 2 \sum_{i=4}^{2n} z_i P_{(2n)i} + \frac{\partial}{\partial z_{2n}} [2z_1 z_{2n} P_{1(2n)} + \cdots + 2z_{(2n-1)} z_{2n} P_{(2n-1)(2n)}] \\ &= 2 \sum_{i=1}^{2n} z_i P_{(2n)i} \end{aligned}$$

Con lo que se obtiene

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial z_1} \\ \frac{\partial V}{\partial z_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial z_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \sum_{j=1}^{2n} z_j P_{1j} \\ 2 \sum_{j=1}^{2n} z_j P_{2j} \\ \vdots \\ 2 \sum_{j=1}^{2n} z_j P_{nj} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Finalmente el subsistema (3.19) para n número de robots queda de la siguiente forma

$$f(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1^e(t, \tau) \\ \dot{x}_2^e(t, \tau) \\ \vdots \\ \dot{x}_n^e(t, \tau) \\ \dot{y}_1^e(t, \tau) \\ \dot{y}_2^e(t, \tau) \\ \vdots \\ \dot{y}_n^e(t, \tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^d(t)y_1^e(t) - C_1^x \left[x_1^e(t, \tau) + \sum_{j=1, j \neq 1}^n C_{ij}^x (x_1^e(t, \tau) - x_j^e(t, \tau)) \right] \\ \omega_2^d(t)y_2^e(t) - C_2^x \left[x_2^e(t, \tau) + \sum_{j=1, j \neq 2}^n C_{ij}^x (x_2^e(t, \tau) - x_j^e(t, \tau)) \right] \\ \vdots \\ \omega_n^d(t)y_n^e(t) - C_n^x \left[x_n^e(t, \tau) + \sum_{j=1, j \neq n}^n C_{ij}^x (x_n^e(t, \tau) - x_j^e(t, \tau)) \right] \\ -\omega_1^d(t)x_1^e(t) \\ -\omega_2^d(t)x_2^e(t) \\ \vdots \\ -\omega_n^d(t)x_n^e(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Se puede ver que $\frac{\partial V(t, \varphi_1(0))}{\partial t}$ es igual a cero debido a que la función V no depende explícitamente del tiempo, más bien de forma implícita, $\frac{\partial V(t, \varphi_1(0))}{\partial x}$ esta compuesta por la derivada parcial de la función V de cada variable de estado de cada robot y finalmente, $f(t, \varphi_1)$ representa la dinámica del error del subsistema de posición con retardo en la retroalimentación provenientes de la ecuación (3.19).

Sustituyendo las ecuaciones (A.2), (A.3) y (A.4) en la expresión (A.1) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \varphi_1) &= 2 \sum_{i=1}^{2n} z_i P_{1i} \left[\omega_1^d(t)y_1^e(t) - C_1^x \left[x_1^e(t, \tau) + \sum_{j=1, j \neq 1}^n C_{ij}^x (x_1^e(t, \tau) - x_j^e(t, \tau)) \right] \right] \\ &+ 2 \sum_{i=1}^{2n} z_i P_{2i} \left[\omega_2^d(t)y_2^e(t) - C_2^x \left[x_2^e(t, \tau) + \sum_{j=1, j \neq 2}^n C_{ij}^x (x_2^e(t, \tau) - x_j^e(t, \tau)) \right] \right] \\ &+ \dots + 2 \sum_{i=1}^{2n} z_i P_{ni} \left[\omega_n^d(t)y_n^e(t) - C_n^x \left[x_n^e(t, \tau) + \sum_{j=1, j \neq n}^n C_{ij}^x (x_n^e(t, \tau) - x_j^e(t, \tau)) \right] \right] \\ &- 2 \sum_{i=1}^{2n} z_i P_{4i} \omega_1^d(t)x_1^e(t) - 2 \sum_{i=1}^{2n} z_i P_{5i} \omega_2^d(t)x_2^e(t) - \dots - 2 \sum_{i=1}^{2n} z_i P_{(2n)i} \omega_n^d(t)x_n^e(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t, \varphi_1) &= -2 \sum_{i=1}^{2n} z_i P_{1i} \omega_1^d(t) y_1^e(t) - 2 \sum_{i=1}^{2n} z_i P_{4i} \omega_1^d(t) x_1^e(t) - 2 \sum_{i=1}^{2n} z_i P_{1i} C_1^x x_1^e(t, \tau) \\
&\quad - \left(2 \sum_{i=1}^{2n} z_i P_{1i} \right) \left(C_1^x \sum_{j=1, j \neq 1}^n C_{ij}^x (x_1^e(t, \tau) - x_j^e(t, \tau)) \right) \\
&\quad - 2 \sum_{i=1}^{2n} z_i P_{2i} \omega_2^d(t) y_2^e(t) - 2 \sum_{i=1}^{2n} z_i P_{5i} \omega_2^d(t) x_2^e(t) - 2 \sum_{i=1}^{2n} z_i P_{2i} C_2^x x_2^e(t, \tau) \\
&\quad - \left(2 \sum_{i=1}^{2n} z_i P_{2i} \right) \left(C_2^x \sum_{j=1, j \neq 2}^n C_{ij}^x (x_2^e(t, \tau) - x_j^e(t, \tau)) \right) - \dots \\
&\quad - 2 \sum_{i=1}^{2n} z_i P_{ni} \omega_n^d(t) y_n^e(t) - 2 \sum_{i=1}^{2n} z_i P_{(2n)i} \omega_n^d(t) x_n^e(t) - 2 \sum_{i=1}^{2n} z_i P_{(2n)i} C_n^x x_n^e(t, \tau) \\
&\quad - \left(2 \sum_{i=1}^{2n} z_i P_{ni} \right) \left(C_n^x \sum_{j=1, j \neq n}^n C_{ij}^x (x_n^e(t, \tau) - x_j^e(t, \tau)) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t, \varphi_1) = & 2z_1 P_{11} \omega_1^d(t) y_1^e(t) + 2z_{(n+1)} P_{1(n+1)} \omega_1^d(t) y_1^e(t) + 2 \sum_{i=1; i \neq 1, n+1}^{2n} z_i P_{1i} \omega_1^d(t) y_1^e(t) \\
& - 2z_1 P_{(n+1)1} \omega_1^d(t) x_1^e(t) - 2z_{(n+1)} P_{(n+1)(n+1)} \omega_1^d(t) x_1^e(t) - 2 \sum_{i=1; i \neq 1, n+1}^{2n} z_i P_{(n+1)i} \omega_1^d(t) x_1^e(t) \\
& - 2z_1 P_{11} C_1^x x_1^e(t, \tau) - 2z_{n+1} P_{1(n+1)} C_1^x x_1^e(t, \tau) - 2 \sum_{i=1; i \neq 1, n+1}^{2n} z_i P_{1i} C_1^x x_1^e(t, \tau) \\
& - 2 \left(\sum_{i=1}^{2n} z_i P_{1i} \right) \left(C_1^x \sum_{j=1, j \neq 1}^n C_{1j}^x (x_1^e(t, \tau) - x_j^e(t, \tau)) \right) + \dots \\
& + 2z_n P_{nn} \omega_n^d(t) y_n^e(t) + 2z_{2n} P_{(n)(2n)} \omega_n^d(t) y_n^e(t) + 2 \sum_{i=1; i \neq n, 2n}^{2n} z_i P_{ni} \omega_n^d(t) y_n^e(t) \\
& - 2z_n P_{(2n)(n)} \omega_n^d(t) x_n^e(t) - 2z_{2n} P_{(2n)(2n)} \omega_n^d(t) x_n^e(t) - 2 \sum_{i=1; i \neq n, 2n}^{2n} z_i P_{(2n)i} \omega_n^d(t) x_n^e(t) \\
& - 2z_n P_{nn} C_n^x x_n^e(t, \tau) - 2z_{2n} P_{(n)(2n)} C_n^x x_n^e(t, \tau) - 2 \sum_{i=1; i \neq n, 2n}^{2n} z_i P_{ni} C_n^x x_n^e(t, \tau) \\
& - 2 \left(\sum_{i=1}^{2n} z_i P_{ni} \right) \left(C_n^x \sum_{j=1, j \neq n}^n C_{nj}^x (x_n^e(t, \tau) - x_j^e(t, \tau)) \right)
\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de la matriz P descrita en la ecuación (3.24) y a los elementos z_i del vector (3.23) se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t, \varphi_1) = & 2 \frac{\omega_1^d(t)}{c^x} y_1^e(t) x_1^e(t) - y_1^{e2}(t) + x_1^{e2}(t) - \frac{c^x}{\omega_1^d(t)} y_1^e(t) x_1^e(t) - 2 \frac{\omega_1^d(t)}{c^x} y_1^e(t) x_1^e(t) - 2x_1^e(t) x_1^e(t, \tau) \\
& + \frac{c^x}{\omega_1^d(t)} y_1^e(t) x_1^e(t, \tau) - 2 \left(\sum_{i=1}^{2n} z_i P_{1i} \right) \left(C_1^x \sum_{j=1, j \neq 1}^n C_{1j}^x (x_1^e(t, \tau) - x_j^e(t, \tau)) \right) + \dots \\
& + 2 \frac{\omega_n^d(t)}{c^x} y_n^e(t) x_n^e(t) - y_n^{e2}(t) + x_n^{e2}(t) - \frac{c^x}{\omega_n^d(t)} y_n^e(t) x_n^e(t) - 2 \frac{\omega_n^d(t)}{c^x} y_n^e(t) x_n^e(t) - 2x_n^e(t) x_n^e(t, \tau) \\
& + \frac{c^x}{\omega_n^d(t)} y_n^e(t) x_n^e(t, \tau) - 2 \left(\sum_{i=1}^{2n} z_i P_{ni} \right) \left(C_n^x \sum_{j=1, j \neq n}^n C_{nj}^x (x_n^e(t, \tau) - x_j^e(t, \tau)) \right)
\end{aligned}$$

$$\dot{V}(t, \varphi_1) = \sum_{i=1}^{2n} \left[V'_i - \left(2x_i^e(t) - \frac{c^x}{\omega_i^d(t)} y_i^e(t) \right) \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n C_{ij}^x (x_i^e(t, \tau) - x_j^e(t, \tau)) \right) \right] \quad (\text{A.5})$$

donde

$$V'_i = -x_i^{e2}(t) - y_i^{e2}(t) - \left(2x_i^e(t) - \frac{c^x}{\omega_i^d(t)} y_i^e(t) \right) (x_i^e(t, \tau) - x_i^e(t)) \quad (\text{A.6})$$

A.3 Condición para que el estado con retardo sea menor que el estado actual

Si a lo largo de la solución del sistema $(x_i^e, y_i^e) = (x_i^e(t; t_0, x_1^e(0)), y_i^e(t; t_0, y_1^e(0)))$ para todo $t \geq t_0 + \tau$ se tiene la desigualdad $V(x_i^e(t), y_i^e(t)) < \max_{-2\tau \leq s \leq 0} V(x_i^e(t+s), y_i^e(t+s))$ a continuación, la función $\max_{-2\tau \leq s \leq 0} V(x_i^e(t+s), y_i^e(t+s))$ es monótonicamente decreciente a lo largo de la solución y tiende a cero considerando que es una función definida positiva, por lo tanto la correspondiente solución también tiende a cero [Sedova *et al.* (2007)].

A.4 Derivada del error \dot{x}_i^e

$$x_i^e = (x_i^d - x_i) \cos \theta_i + (y_i^d - y_i) \sin \theta_i$$

Derivando el error x_i^e se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^e &= -(x_i^d - x_i) \dot{\theta}_i \sin \theta_i + (\dot{x}_i^d - \dot{x}_i) \cos \theta_i + (y_i^d - y_i) \dot{\theta}_i \cos \theta_i + (\dot{y}_i^d - \dot{y}_i) \sin \theta_i \\ \dot{x}_i^e &= [-(x_i^d - x_i) \sin \theta_i + (y_i^d - y_i) \cos \theta_i] \dot{\theta}_i + \dot{x}_i^d \cos \theta_i - \dot{x}_i \cos \theta_i + \dot{y}_i^d \sin \theta_i \\ &\quad - \dot{y}_i \sin \theta_i \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Sustituyendo en la ecuación (A.7) al error y_i^e proveniente de las ecuaciones (3.4), además $\omega_i = \dot{\theta}_i$ y por último \dot{x}_i, \dot{y}_i del modelo cinemático (3.3) entonces la ecuación anterior se reduce a

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^e &= \omega_i y_i^e - v_i \cos^2 \theta_i - v_i \sin^2 \theta_i + \dot{x}_i^d \cos \theta_i + \dot{y}_i^d \sin \theta_i \\ \dot{x}_i^e &= \omega_i y_i^e - v_i + \dot{x}_i^d \cos \theta_i + \dot{y}_i^d \sin \theta_i \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

De las ecuaciones (3.4) podemos despejar a θ_i obteniendo

$$\theta_i = \theta_i^d - \theta_i^e \quad (\text{A.9})$$

Sustituyendo la ecuación (A.9) en la expresión (A.8) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^e &= \omega_i y_i^e - v_i + \dot{x}_i^d \cos(\theta_i^d - \theta_i^e) + \dot{y}_i^d \sin(\theta_i^d - \theta_i^e) \\ \dot{x}_i^e &= \omega_i y_i^e - v_i + \dot{x}_i^d (\cos \theta_i^d \cos \theta_i^e + \sin \theta_i^d \sin \theta_i^e) + \dot{y}_i^d (\sin \theta_i^d \cos \theta_i^e - \cos \theta_i^d \sin \theta_i^e) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Sustituyendo nuevamente \dot{x}_i, \dot{y}_i del modelo cinemático (3.3) en la ecuación (A.10) resulta finalmente

$$\dot{x}_i^e = \omega_i y_i^e - v_i + v_i^d \cos \theta_i^e \quad (\text{A.11})$$

De forma similar a la derivada del error \dot{x}_i^e se obtiene la derivada del error \dot{y}_i^e

Referencias

- [Sanchiz Martí *et al.* (2006)] J. Martí, J. Carpio (2006), Sistema industrial de múltiples vehículos autónomos guiados por laser. *Universitat Jaume I*.
- [Chan *et al.* (2012)] E. Chan, P. Gilhead, P. Jelínek (2012), Cooperative control of SARTRE automated platoon vehicles. *19th ITSWorld Congress Vienna, Austria*
- [Aguirre (2011)] A. Aguirre (2011), Remote Control and Motion Coordination of Mobile Robots. *Tesis Doctoral*
- [Guzenko *et al.* (2008)] P. Yu. Guzenko, P. Hövel, V. Flunker, E. Schöll, A. L. Fradkov (2008), Adaptive tuning of feedback gain in time-delayed feedback control. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*
- [Jiang *et al.* (2012)] L. Jiang, R. Zhang (2008), Stable Formation Control of Multi-robot System with Communication Delay. *International Journal of Advanced Robotic Systems*
- [Galvan (1997)] G. R. Galvan (1997), Análisis de estabilidad robusta para sistemas dinámicos con retardo. *Tesis Doctoral*
- [Papachristodoulou (2004)] A. Papachristodoulou, S. Prajna (2002) On the Construction of Lyapunov Functions using the Sum of Squares Decomposition. *IEEE Conf. Dec. Control*, 4153-4158, Vol. 5, Boston, MA, E.U.
- [Mazenc *et al.* (2000)] F. Mazenc, S. Iulian (2000) Lyapunov Stability Analysis for Nonlinear Delay Systems. *IEEE Conf. Dec. Control*, 245-251, Vol. 42, Sydney, Australia.
- [Pogromsky *et al.* (1998)] A. L. Fradkov, A. Yu. Pogromsky, (1998). Introduction to control of oscillations and chaos. *World Scientific Series on Nonlinear Science*, 87-92, Vol. 35, Series A, Singapur.
- [Niculescu *et al.* (2001)] N.O. Sedova (2007), Niculescu, S. I., 2001. Delay Effects on Stability: a Robust Control Approach. *Springer, New York*.
- [Richard *et al.* (2003)] Richard, J. P., 2003. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica* 39 (10), 1667-1694.

- [Silva, *et al.* (2001)] Silva, G. J., Datta, A. B. S. P., 2001. Controller design via Padé approximation can lead to instability. *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, 4733-4737, Orlando, FL, Dec. 2001. pp.
- [Smith, *et al.* (1957)] Smith, O., 1957. Closer control of loops with dead time. *Chemical Engineering Progress*, 53, 217-219.
- [Zhong, *et al.* (2006)] Zhong, Q. C., 2006. Robust Control of Time-Delay Systems. Springer, London.
- [Yi, *et al.* (2010)] S. Yi, P. W. Nelson, G. Ulsoy, 2010. Analysis and control using the Lambert w Function.
- [Hale *et al.* (1993)] J.K. Hale, S.M.V. Lunel (1993). Introduction to functional differential equations. *Springer-Verlag*, New York, 1993.
- [Herrera (2003)] Herrera (2003) Tecnologías y Redes de Transmisión de datos. *Editorial Limusa*, 259-265, Balderas, México D.F.
- [Hale (1984)] J. Hale (1984), Theory of Function Differential Equations. *Springer-Verlag*, New York, 1977; Mir, Moscow 1984
- [Sorribes (2011)] A. G. Sorribes, (2011). Controladores digitales basados en predictor para sistemas con retardos variables en el tiempo: 4-6, *Tesis Doctoral*, Universidad Politécnica de Valencia, Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática.
- [Richard (2003)] J.P. Richard, (2003). Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(10): 1667-1694, 2003.
- [Kostić *et al.* (2010)] D. Kostić, S. Adinandra, J. Caarls, N. van de Wouw, H. Nijmeijer (2010), Saturated Control of Time-Varying Formations and Trajectory Tracking for Unicycle Multi-agent Systems. *IEEE Conf. Dec. Control*, 4054-4059, Atlanta, GA.
- [Sadowska *et al.* (2011)] A. Sadowska, T. van den Broek, H. Huijberts, N. van de Wouw, D. Kostic, H. Nijmeijer (2011), A virtual structure approach to formation control of unicycle mobile robots using mutual coupling. *International Journal of Control*, **84**(11), 1886-1902.
- [Kanayama *et al.* (1990)] Y. Kanayama, Y. Kimura, F. Miyazaki, T. Noguchi (1990), A Stable Tracking Control Method for an Autonomous Mobile Robot. *IEEE International Conf. on Robotics and Automation*, 384-389.
- [Morales *et al.* (2013)] A. Morales, H. Nijmeijer, H. Gutiérrez (2013), A coordination control strategy for a group of unicycle robots. *Congreso anual Asociación de México de Control Automático*.
- [Sedova *et al.* (2007)] N.O. Sedova (2007), Local and Semiglobal Stabilization in a Cascade with Delay. *ISSN 0005-1179, Automation and Remote Control*.

[E-PUCK.ORG (2004)] E-PUCK.ORG (2004), e-puck education. Disponible en:
<http://www.e-puck.org/>

[MathWorld.(2015)] MathWorld (2015), Diagonally Dominant Matrix, creado por Eric W. Weisstein. Disponible en:
<http://mathworld.wolfram.com/DiagonallyDominantMatrix.html>

[Khalil (2002)] H.K. Khalil (2002), Nonlinear Systems. 117-117, *Tercera edición*